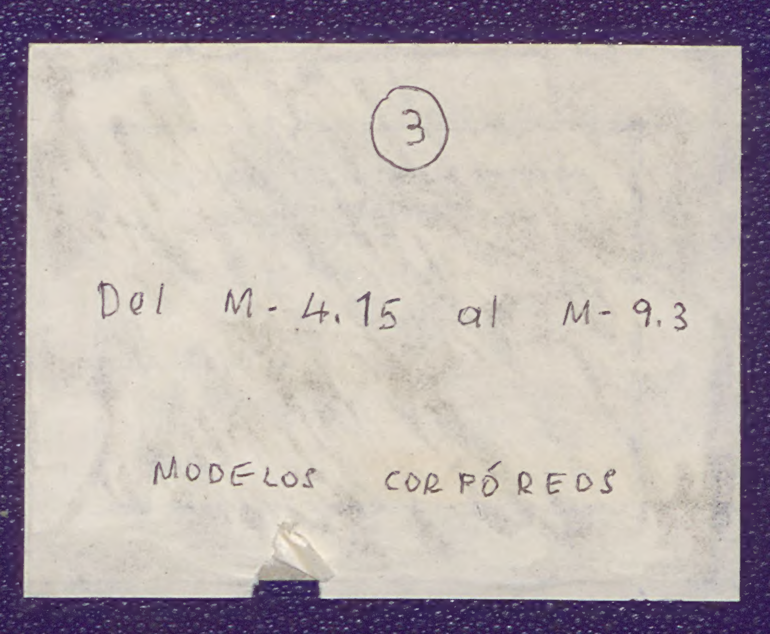

3
Del M-4.15 al M-9.3
MODELOS CORPÓREOS


UNIVERSIDAD DE SEVILLA
601280226
Biblioteca
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, UN PRISMA RECTO REGULAR, CUYA BASE ES DICHA CARA, Y SUS CARAS LATERALES SON CUADRADOS.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

estos prismas tienen las aristas de sus bases inferiores, comunes dos a dos.

P 2) El número de sus caras pentagonales será: $C_5 = 12$

El número de caras cuadradas, será $C_4 = 12 \times 5 = 60$

Total $= 72$ caras

El número de sus vértices, será: en las bases superiores $= 12 \times 5 = 60$

en las bases inferiores $= 20$

Total vértices $= 80$

El número de aristas, será: en las bases superiores $= 12 \times 5 = 60$

en las bases inferiores $= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$

en las caras laterales $= 12 \times 5 = 60$

Total.... aristas 150

En resumen este poliedro tiene:

$$C = C_5 + C_4 = 12 + 60 = 72 \text{ caras}$$

$$V = 12 \times 5 \times 2 = 80 \text{ vértices}$$

$$A = 12 \times 5 \times 2 = 150 \text{ aristas}$$

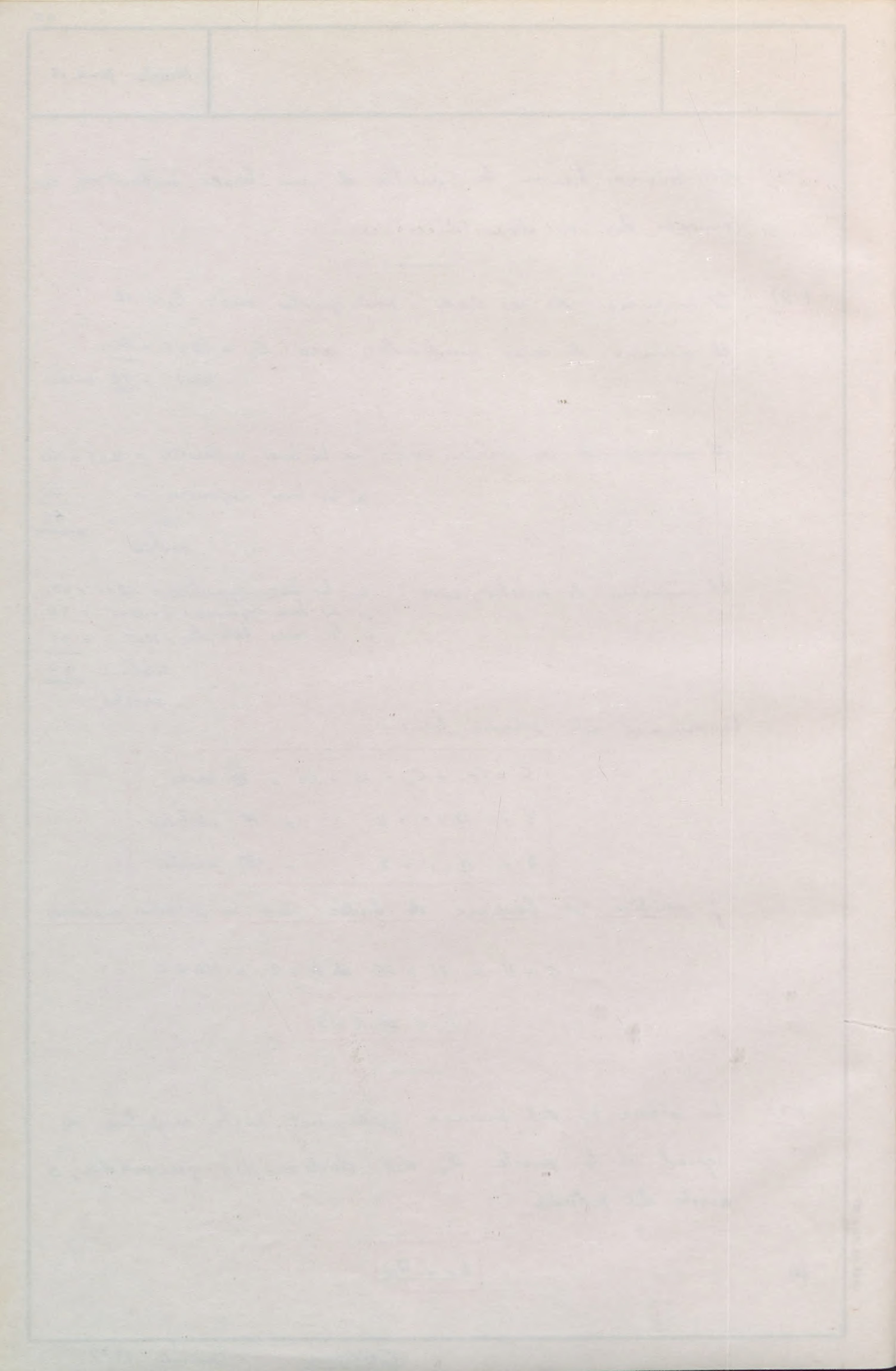
y verifica el teorema de Euler para los poliedros convexos

$$C + V = 72 + 80 \neq A + 2 = 150 + 2$$

$$C + V \neq A + 2$$

P 3) La altura h_5 del prisma pentagonal, recto, regular es igual a la arista a_{12} del dodecaedro generador, o arista del poliedro

(1) $$h_5 = a_{12}$$



P4) Si unimos un vértice V de la cara pentagonal superior, con el centro C de dicho pentágono regular convexo, a continuación éste con el centro O del dodecaedro generador, y finalmente V con O se nos formará un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa $\overline{VO}$ será el radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita al poliedro estudiado; el cateto $\overline{VC}$ será el radio r_{c-5} de la circunferencia circunscrita a la cara pentagonal; y el otro cateto $\overline{CO}$ es la suma del radio r_{ei}^{12} de la esfera inscrita al dodecaedro generador y la altura h_5 del prisma.

En resumen tendremos:

$$\overline{VO} = r_{ec} \qquad " \qquad \overline{VC} = r_{c-5} \qquad y \qquad \overline{CO} = r_{ei}^{12} + a_{12}$$

verificándose que

$$\overline{VO}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CO}^2 \qquad (2)$$

y de aquí: $VO = \sqrt{\overline{VC}^2 + \overline{CO}^2}$ donde sustituyendo valores, será:

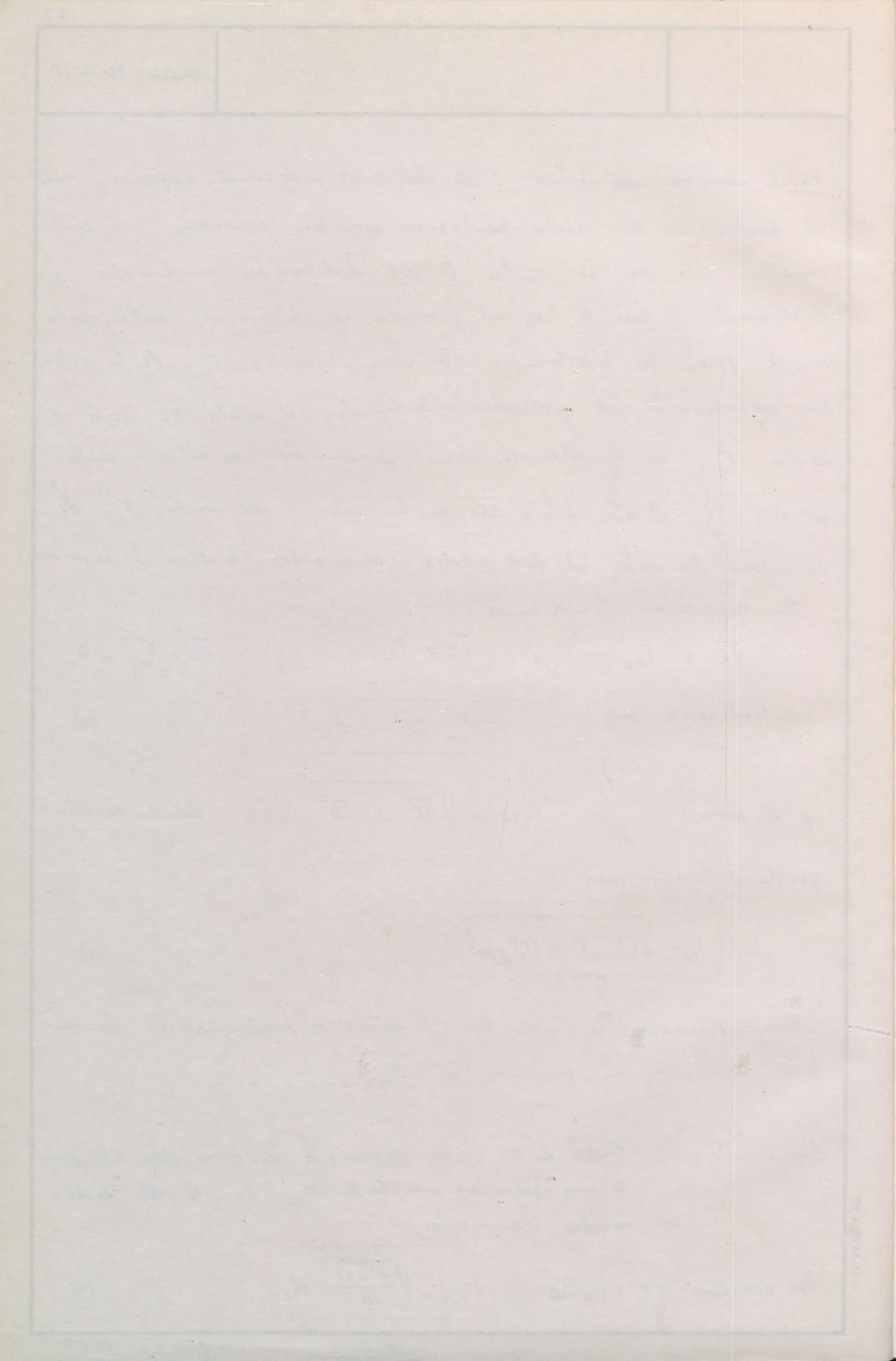
$$r_{ec} = \sqrt{(r_{c-5})^2 + (r_{ei}^{12} + h_5)^2} \qquad (3)$$

Para desarrollar la fórmula (3) damos a continuación los valores siguientes en función de a_{12}:

1° "r_{c-5}" = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular de lado a_{12} (arista del dodecaedro generador)

Ver ejercicio E.P. 1.400-44 $$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} \qquad (4)$$

Junio 1979



Modelo M-4, 15

2º "r_{ei}^{12}" = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{0i}^{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\; a_{12} \qquad (5)$$

Sustituyendo en la fórmula (3) los valores de las fórmulas (1), (4) y (5), tendremos

$$r_{ec} = \sqrt{(r_{c-5})^2 + (r_{0i}^{12} + h_5)^2} = \sqrt{\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; a_{12}\right]^2 + \left[\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\; a_{12} + a_{12}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) + \left[\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} + 1\right]^2}\; a_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{25+11\sqrt{5}}{40} + 1 + 2\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20 + 4\sqrt{5} + 25 + 11\sqrt{5} + 40}{40} + \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{85+15\sqrt{5}}{40} + \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{17 + 3\sqrt{5}}{8} + \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}\; a_{12} \cong 2,27\,82\,79\,66\,2 \times a_{12}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$(6) \qquad r_{ec} \cong 2,27\,82\,79\,66\,2\ldots\; a_{12}$$

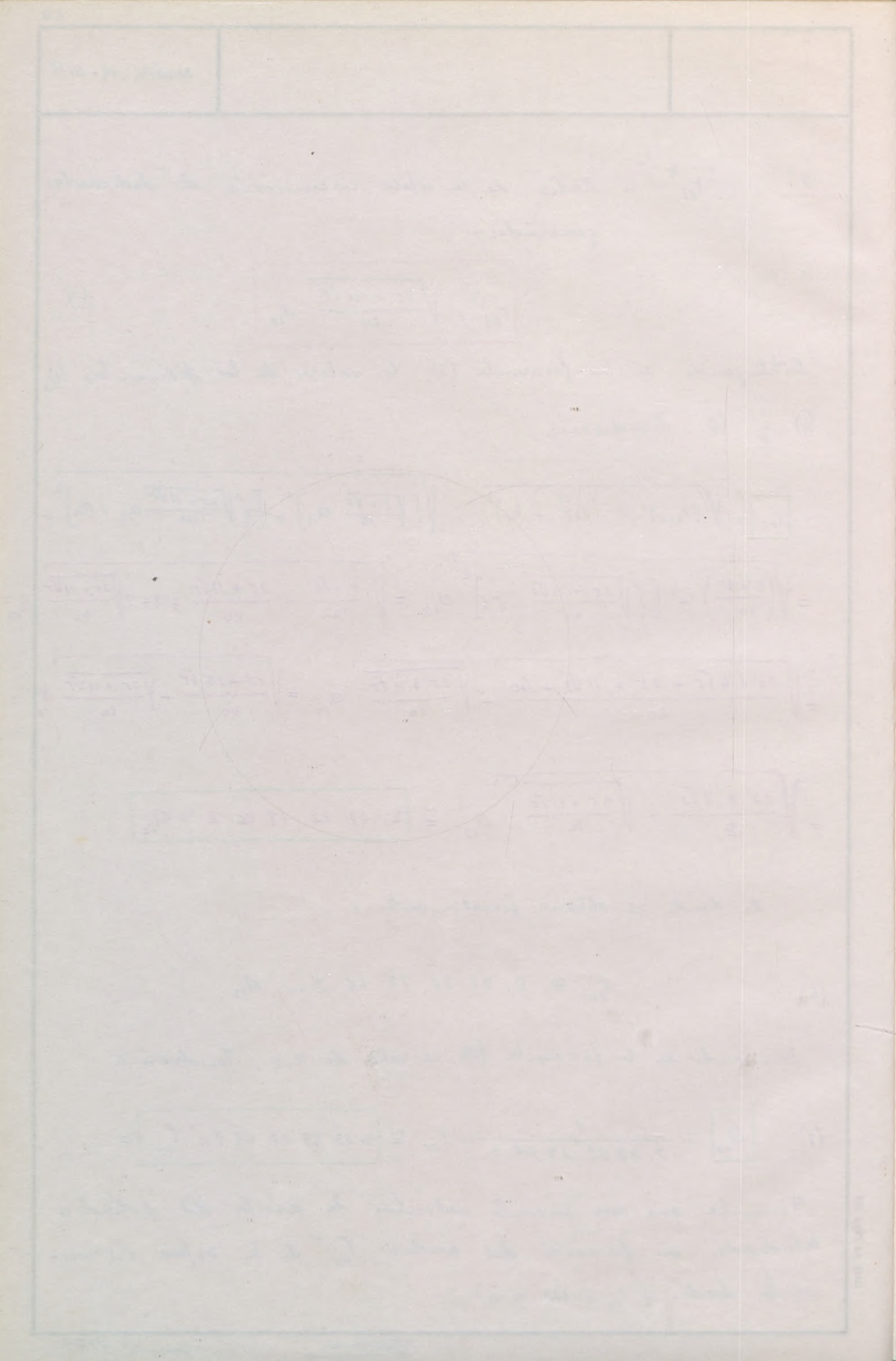
Despejando en la fórmula (6) el valor de a_{12}, tendremos

$$(7) \qquad a_{12} \cong \frac{1}{2,27\,82\,79\,66\,2\ldots}\; r_{ec} \cong 0,43\,89\,27\,67\,7\ldots\; r_{ec} \cong$$

Fórmula que nos permite calcular la arista del poliedro estudiado, en función del radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita dado. (r_{ec} = 110 mm)

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1979



Aplicando la fórmula (7), podemos construir los polígonos que forman sus caras (pentágonos regulares y cuadrados de igual lado, cuyo valor es inmediato, por ser: $l_5 = l_4 = a_{12}$)

Teniendo en cuenta las consideraciones expuestas para la construcción del modelo M-4,12, el presente se compondrá de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL

12 unidades

Es un pentágono regular cuya arista, será: (ver form 7)

$$a_{12} \cong 0,43\,89\,27\,67\,7\ldots \times 110 \cong 48,28\,20\,44\,47\ldots \cong 48,3 \text{ mm}$$

Siendo el radio de su circunferencia circunscrita (ver ejercicio G.P. 1.400 - 44)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} \cong \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 48,28\,20\,44\,47\ldots \cong$$

$$\cong 41,07\,11\,60\,15 \cong 41,1 \text{ mm}$$

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

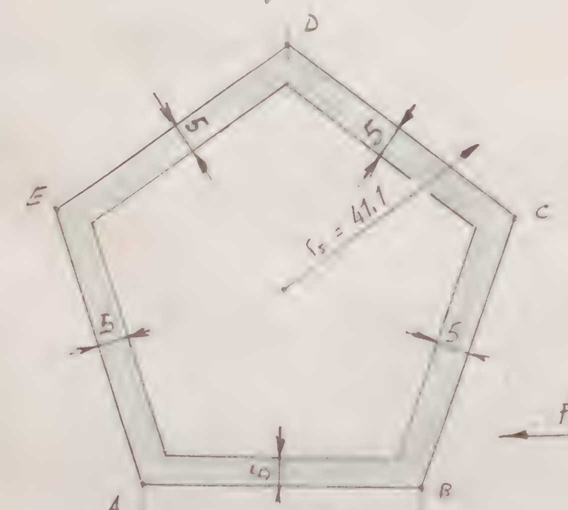


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

Modelo M-4.15

PIEZA Nº 2 DESARROLLO LATERAL DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL

12 unidades

Sus caras son cuadrados, de lado $l_4 = a_{12} = 48,3$ mm.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

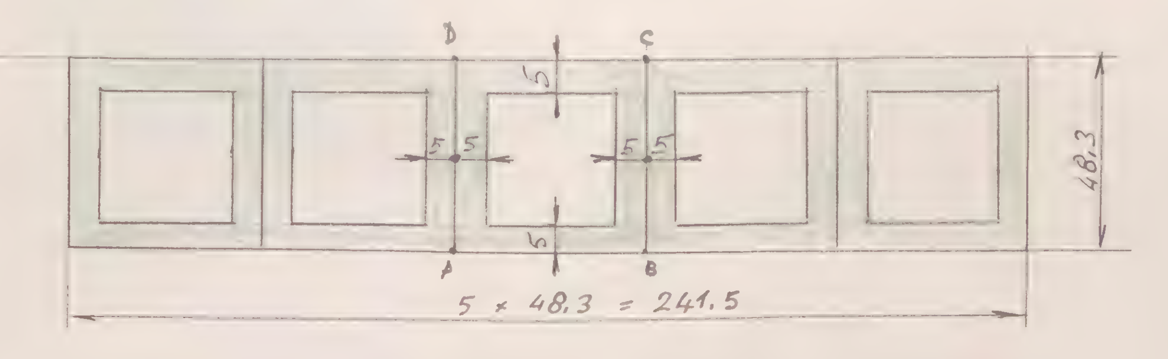


Figura 2

PIEZA Nº 2 12 (u)

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 150 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

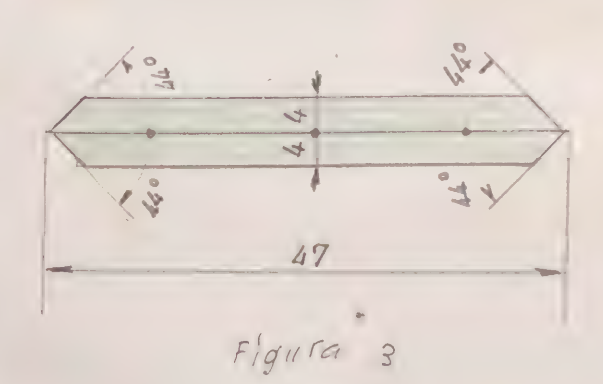


Figura 3

PIEZA Nº 3 150 (u)

Figura 3

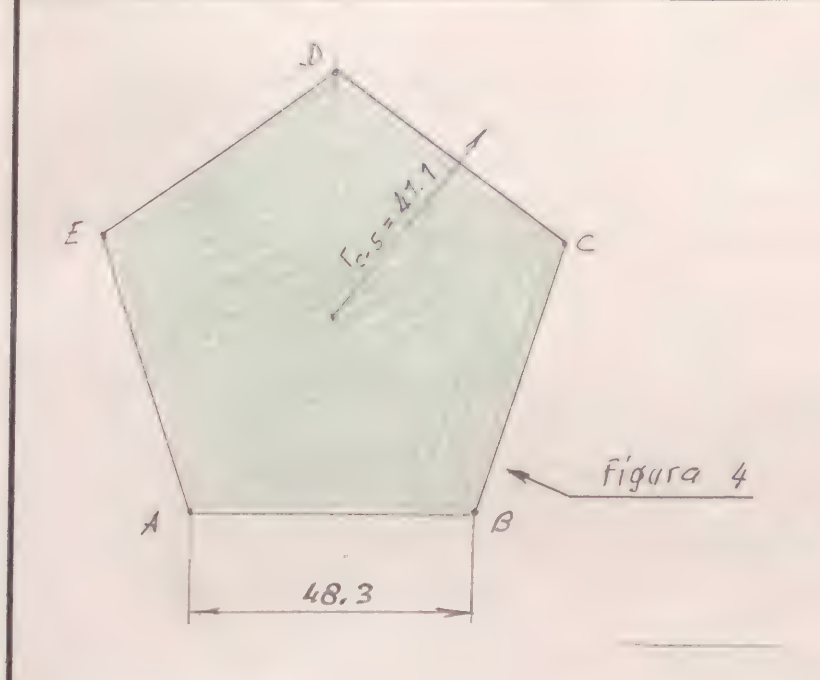
PIEZA Nº 4 FORRO MACIZO DE LA BASE PENTAGONAL DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDEA de la figura 1, y se detallan en la figura 4.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1979

Modelo M-4.15



PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL 60 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las del cuadrado ABCDA de la figura 2, y se detallan en la figura 5

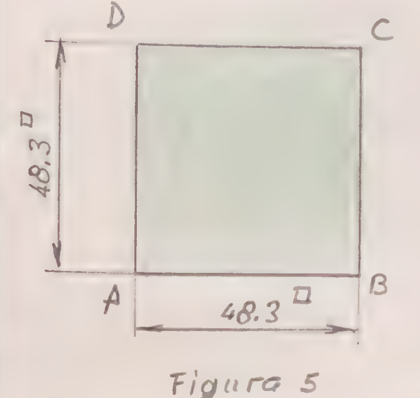


Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

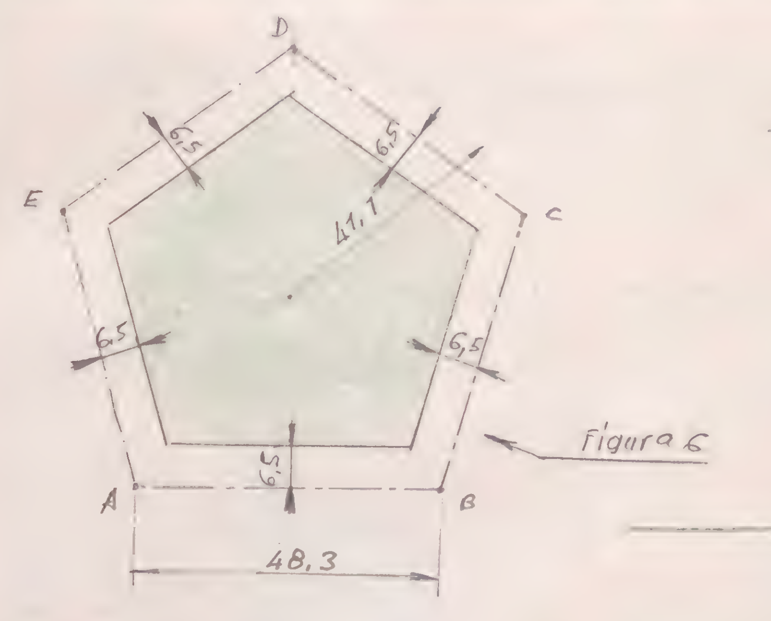
PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LA BASE PENTAGONAL DEL PRISMA RECTO 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDEA de la figura 4, y se detallan en la figura 6

UNE A4 210 x 297



Modelo M-4,15



PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL 60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCDA de la figura 5, y se detallan en la figura 7

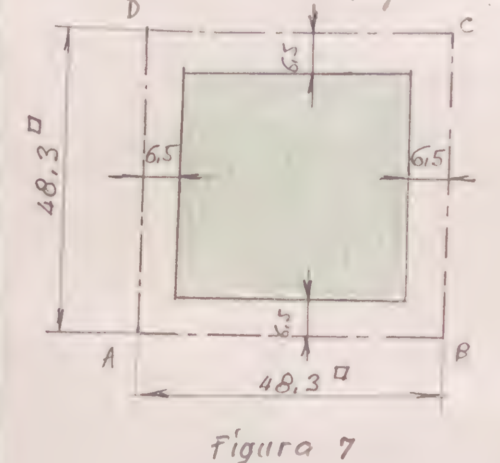
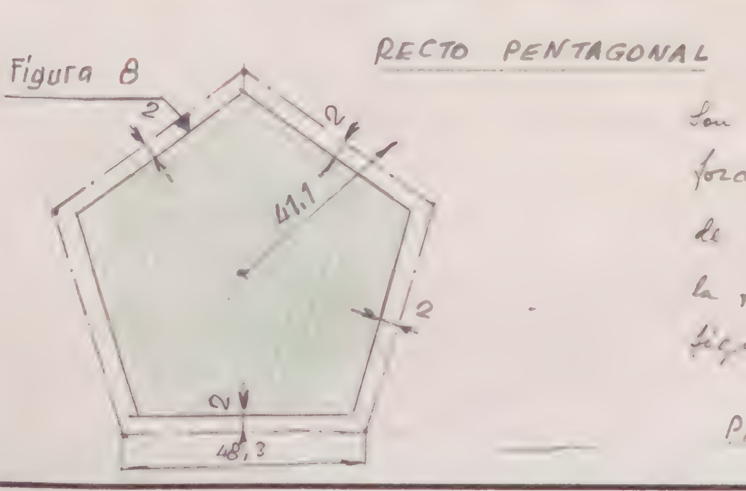


Figura 7

PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN LAS BASES DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL 12 unidades



Son pentágonos regulares cuya forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDEA de la figura 4 y se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

Junio 1979



Modelo M- 4,15

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL 60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCDA de la figura 5, y se detallan en la figura 9.

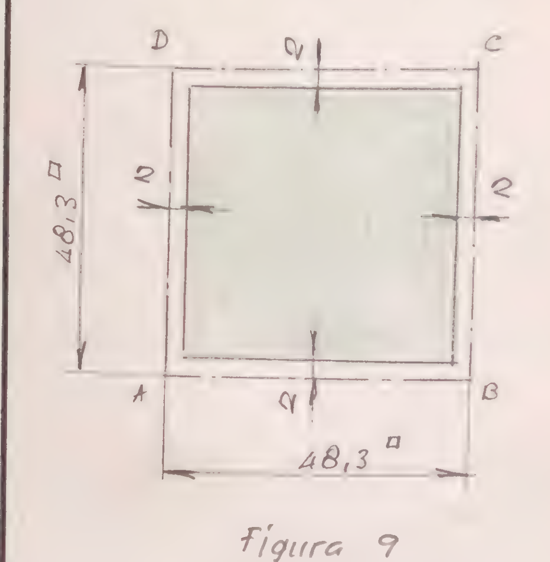


Figura 9

PIEZA Nº 9 60 (u)

Figura 9





Modelo M- 4.15

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

El estudio de este modelo corpóreo, cuya ley de generación se detalla en su enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo compuesto de doce prismas rectos pentagonales regulares acoplados por las aristas inferiores de sus bases, que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro, todas de igual longitud, e iguales a las del dodecaedro regular convexo generador "a_{12}", son de dos clases. En la primera incluiremos las correspondientes a las dos bases de cada prisma pentagonal y en la segunda las de las caras laterales de dichos prismas.

En las aristas de las bases superiores, concurren una cara pentagonal (la propia base superior) y otra cuadrada (cara lateral del prisma) perpendiculares entre sí.

En las aristas de las bases inferiores, concurren dos caras cuadradas y el diedro "2β" formado por ellas es suplementario al diedro "2φ" de dos caras contiguas del dodecaedro generador, ya que los respectivos lados de sus rectilíneos correspondientes son perpendiculares entre sí, por ser las caras laterales de los prismas pentagonales perpendiculares a las del dodecaedro generador.

Si unimos ahora convenientemente dos a dos los vértices de los pentágonos de las bases superiores de los prismas pentagonales, obtendremos 20 caras triangulares asociadas a cada vértice del dodecaedro generador, y otras 30 caras rectangulares asociadas a cada arista del mencionado dodecaedro

[illegible] Noviembre 1979

generada.

Estas nuevas caras juntamente con las de las bases superiores de los prismas, forman un poliedro convexo de las siguientes características:

a) Caras pentagonales regulares = 12

b) Caras triangulares regulares = 20

c) Caras rectangulares = 30

Total 62 caras

d) Aristas de las caras a) = $\frac{12 \times 5}{2}$ = 30

e) Aristas de las caras b) = $\frac{20 \times 3}{2}$ = 30

f) Aristas de las caras c) = $\frac{30 \times 4}{2}$ = 60

Total 120 aristas

g) Vértices = 5 x 12 = 60 vértices

Verificándose el teorema de Euler para los poliedros convexos

$$C + V = A + 2 \quad " \quad 62 + 60 = 120 + 2 = 122$$

Las caras triangulares son triángulos equiláteros, de lado l_3 mayor que la arista a_{12} del dodecaedro generador

$$l_3 > a_{12} \qquad 1)$$



Las caras rectangulares tienen dos lados iguales a las aristas "a_{12}" (los correspondientes a las caras contiguas a las bases superiores del prisma); y los otros dos lados iguales a "l_3" (los correspondientes a las caras contiguas triangulares)

La longitud de las aristas "l_3" se deduce del cálculo siguiente basado en las consideraciones anteriores.

En efecto: Consideremos la sección recta producida por un plano perpendicular a una arista cualquiera de las bases inferiores del prisma pentagonal regular, y en un su extremo.

En esta sección figura 1, aparecerá el rectilíneo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del dodecaedro regular convexo generador, y las dos aristas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de dos prismas pentagonales regulares que formían el ángulo "2β", rectilíneo del diedro suplementario del "2φ"

Figura 1

Si tomamos ahora las longitudes $OA = OB = a_{12}$, el segmento $\overline{AB}$ será el lado l_3 de las caras triangulares equiláteras y al mismo tiempo igual al lado l_3 de la cara rectangular (por fórmula 1).



		Modelo M - 4.15

En el estudio del dodecaedro regular convexo (ver lám. 4) obtuvimos el valor del ángulo φ por la siguiente fórmula:

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \qquad \text{y de aquí}$$

$$\varphi = \text{arc. sen} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 58{,}^{\circ}\, 28\ 35\ 25\ 59 \quad \text{de donde}$$

$$2\varphi = 116^{\circ}\ 56\ 50\ 51\ 2 = 116^{\circ}\ 33'\ 54'',\ 18\ 43\ 2$$

$$2\beta = 180^{\circ} - 2\varphi = 180^{\circ} - 116^{\circ},\ 56\ 50\ 51\ 2 = 63^{\circ},\ 43\ 49\ 48\ 80$$

y de aquí $\beta = 31^{\circ}\ 71\ 74\ 74\ 40$

De la figura 6, se deduce:

$$\overline{AB} = 2 \times (AO \operatorname{sen} \beta) = 2 \operatorname{sen} \beta \times a_{12} = 2 \times 0{,}52\ 57\ 31\ 11\ 2 \times a_{12} =$$

$$= \boxed{1{,}05\ 14\ 62\ 24\ a_{12}} = 1.05\ 14\ 62\ 24 \times 48{,}28\ 20\ 44\ 47 \cong \boxed{50.8}$$

$$\boxed{AB = l_3 = 1.05\ 14\ 62\ 24\ a_{12}} \qquad (2)$$

De la fórmula (2) se deduce que la arista "l_3" es aproximadamente mayor que la a_{12} en un cinco por ciento

$$l_3 \cong 1.05 \times a_{12} > a_{12} \qquad (3)$$

El modelo corpóreo del poliedro convexo que se obtendría como consecuencia de este estudio complementario, podría parecer en principio igual al desarrollado en el

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-4.15

estudio del Arquimediano VI (Lámina 38), compuesto de:

(1) 20 caras triangulares
(2) 30 caras cuadradas
(3) 12 caras pentagonales
} — todas regulares y aristas iguales

(4) 120 aristas

y concurren en cada vértice: $1P_3 + 2P_4 + 1P_5$

Las condiciones (1), (3) y (4) se cumplen en el poliedro estudiado, pero no la (2) (las caras de éste no son cuadradas sino rectangulares de lados a_{12} y $l_3 > a_{12}$) Por otra parte, tampoco son iguales entre sí todas las aristas, como lo son en el Arquimediano VI, y a su vez los lados de los pentágonos regulares son de mayor longitud que los de las caras triangulares.

En resumen, el poliedro estudiado "no es un Arquimediano nº VI" aun cuando son tan parecidos que pueden confundirse a simple vista.

Para obtener el poliedro de este estudio complementario, puede utilizarse este mismo modelo M-4.15, complementándolo con las aristas "l_3" de las caras triangulares y rectangulares, que es lo que hemos realizado en dicho modelo corpóreo.

[signature] Noviembre 1979

MODELO M - 4. 15

PATRONES



VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M-4.15, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES Y CONSTRUÍDO: A) EL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS MACIZAS; Y B) EL PRISMA RECTO PENTAGONAL DE CARAS LATERALES CUADRADAS, CON SUS CARAS VACIADAS.-

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 mm.



ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del poliedro cóncavo M - 4.15, de igual forma y dimensiones, y construido: A) El dodecaedro regular convexo, con sus caras macizas; y B) El prisma recto pentagonal de caras laterales cuadradas, con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M - 4.15.

Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS Y ARISTA $a_{12} = 48.3$ mm

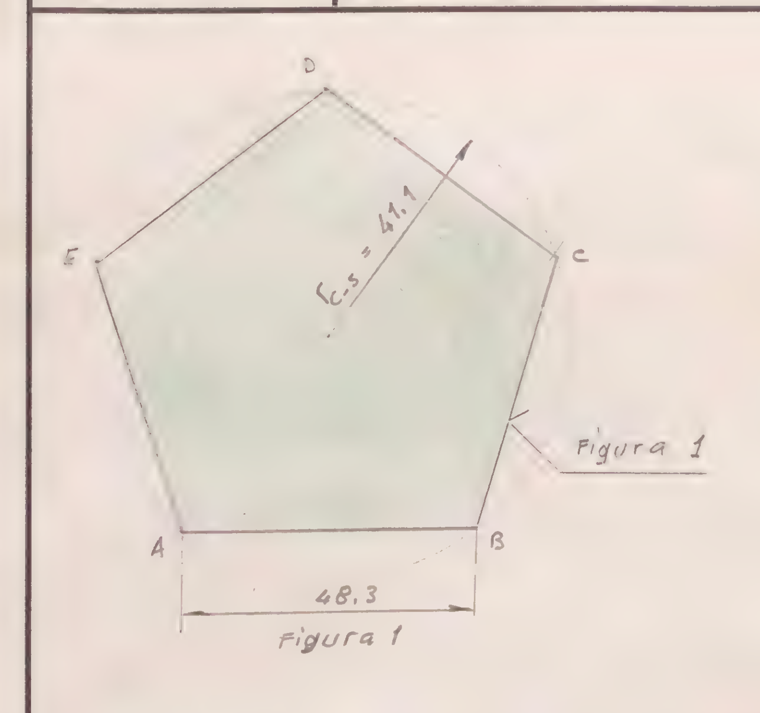
PIEZA Nº 1. CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Son pentágonos regulares de 48.3 mm de lado.
El radio r_{c-5} de su circunferencia circunscrita, será:
(ver ejercicio G. P. 1.400-44)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 48.3 = 41.1 \text{ mm}$$

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

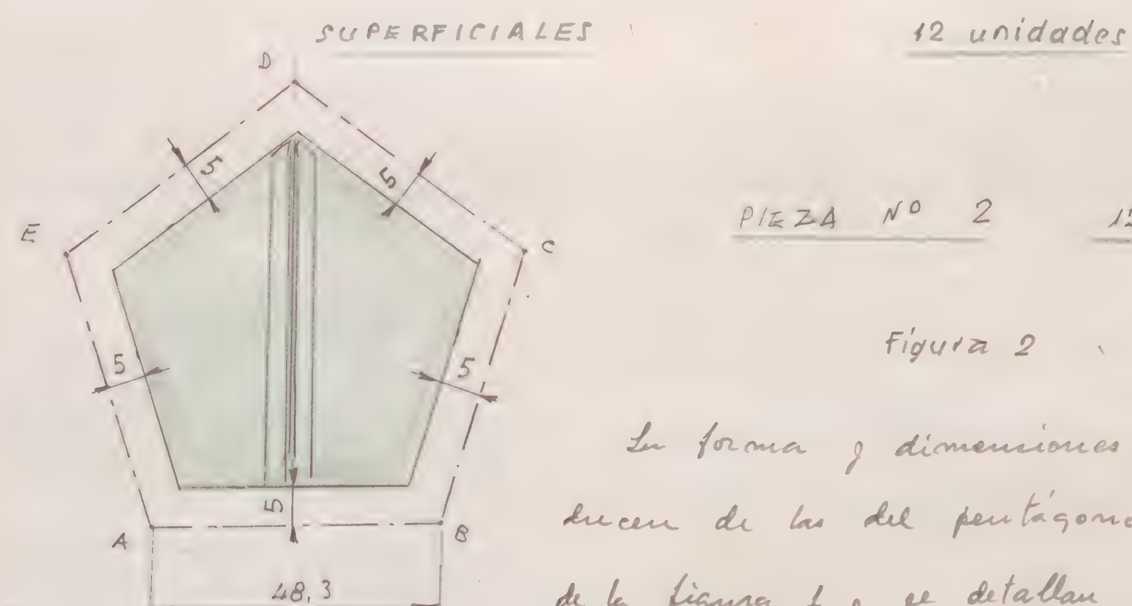
Alvarez Octubre 1979



PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

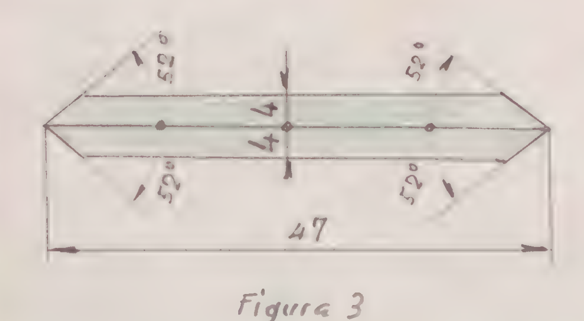


PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono A, B, C, D, EA de la figura 1 y se detallan en la fig. 2.

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 30 unidades



PIEZA Nº3 30 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Tavares Octubre - 1979



PIEZA Nº 4 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 24 unidades (simétricas 2 a 2)

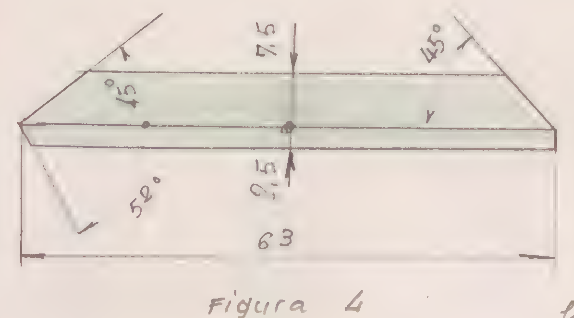


Figura 4

PIEZA Nº 4 24 (u)

Figura 4

Su situación se detalla en la fig. 2; su forma y dimensiones en la fig. 4.

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDEA de la figura 1, y se detalla en la figura 5.

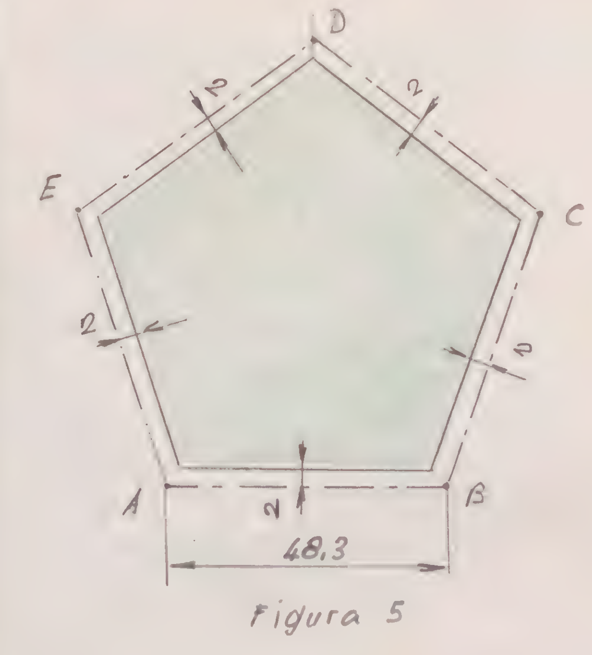


Figura 5

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

B) PRISMA PENTAGONAL RECTO, DE CARAS LATERALES CUADRADAS CON SUS CARAS VACIADAS Y ARISTA

a_{12} = 48,3 mm.

PIEZA Nº 6 DESARROLLO LATERAL DEL PRISMA RECTO PENTAGONAL Y CARAS CUADRADAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

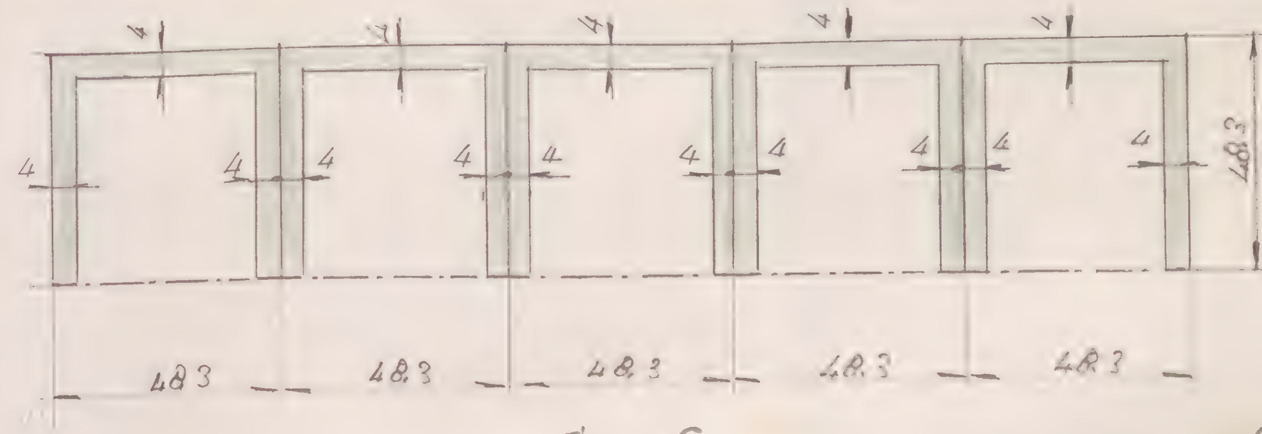


Figura 6

PIEZA Nº6 12(u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 BASE PENTAGONAL REGULAR 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDEA de la fig. 1, y se detallan en la fig. 7

D E C A B 4 4 4 4 4 48.3

Figura 7

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 120 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8.

43° 3 3 43° 48

Figura 8

PIEZA Nº 8 120 (u)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

Alvarez Octubre 1979



MODELO M- 4.16
PATRONES
PIEZA Nº 2
Mod. M-4.16
PIEZA Nº 5
Modelo M- 4.16

MODELO CORPÓREO DEL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_{12}" A LA DISTANCIA "$x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} a_{12}$", SIENDO LA ARISTA DEL ICOSAEDRO GENERADO "$a'_{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} a_{12}$".- EL ICOSAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL DODECAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-4.17

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo generador, de arista "a_{12}", a la distancia "$x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} a_{12}$", siendo la arista del icosaedro generado "$a'_{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} a_{12}$".- El icosaedro generado, se construirá con las caras macizas, y el dodecaedro generador, con las caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

NOTA: Este modelo es igual al M-9.2, por lo que no se ha repetido su ejecución.

UNE A4 210 x 297

Tavares Marzo 1981





ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 5.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular convexo, representado en la lámina nº 5 del ejercicio G. E. .

DATOS: Radio "r_{oc}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro regular pedido.

$$r_{oc}^{20} = 76.1 \text{ mm}$$

Las características del icosaedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de vértices	$V = 12$
Número de aristas	$A = 30$
Número de caras en cada vértice	$5 P_3$

El modelo que se estudia es de caras macizas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARA TRIANGULAR 20 unidades

Es un triángulo equilátero, cuyo lado l_3 es igual a la aris-

UNE A 4-210 x 297



ta a_{20} del icosaedro pedido.

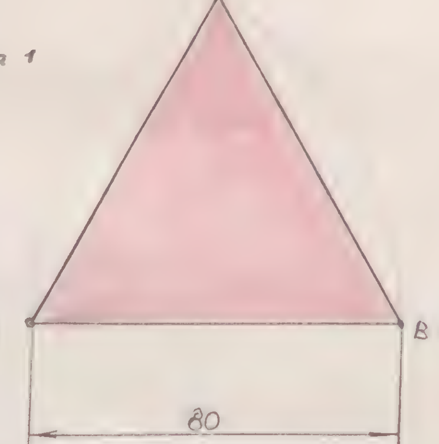
Su valor se obtiene despejando a_{20} de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea:

$$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a_{20} \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$r_{ec}^{20} \times \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = r_{ec}^{20} \times \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5} = 76,1 \times 1,05\,14\,62\,22\,4\ldots \cong$$

$$\cong 80.01\,62\,75\,25 \cong \boxed{80\ mm}$$

Figura 1



PIEZA Nº 1 20 (u)

Fig. 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Es un triángulo equilátero, cuyo lado l_3 se deduce del triángulo ABC de la fig. 1 (Triángulo CDF, de la fig. 2)

Fig 2



PIEZA Nº 2 20 (u)

Fig. 2

UNE A 4-210 x 297

Octubre 1978



Modelo M - 5.1

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 60 unidades

Su longitud se deduce del triángulo DEF de la figura 2 (altura del mismo).

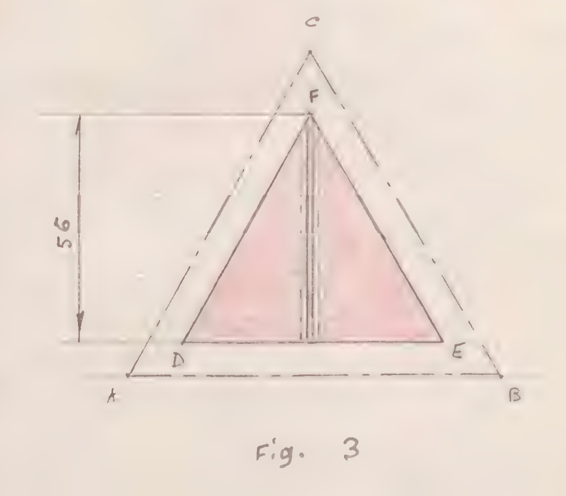
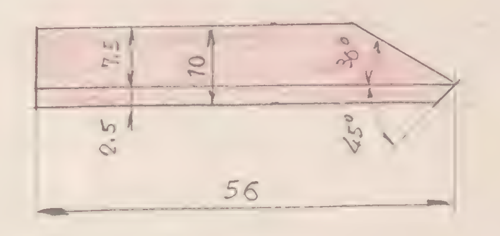


Fig. 3

PIEZA Nº 3 : 20 (u)

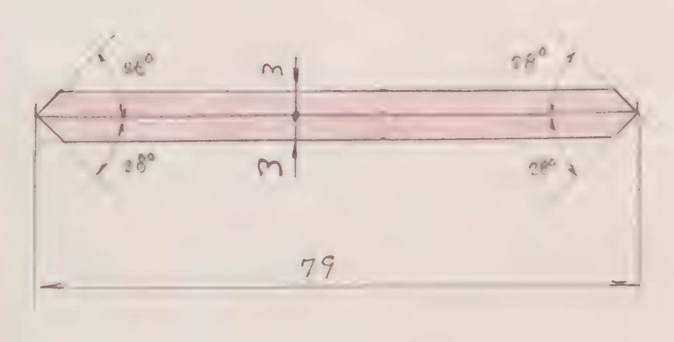
(simétricos 2 a 2)

Fig. 3



PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_{20} (ver fig. 1 ; a_{20} ≈ 80 m m).- La tomamos igual a 79 m m.



PIEZA Nº 4

30 (u)

Fig. 4

Figura 4

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 20 unidades

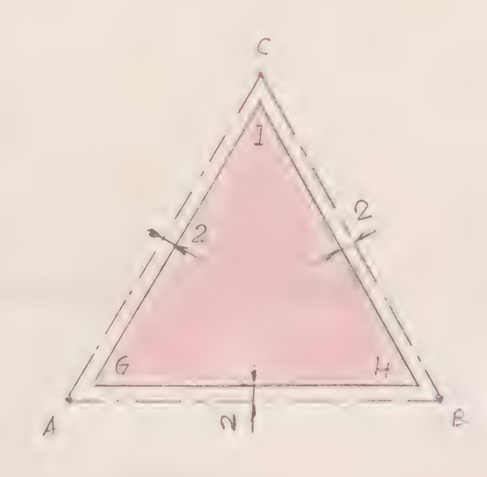


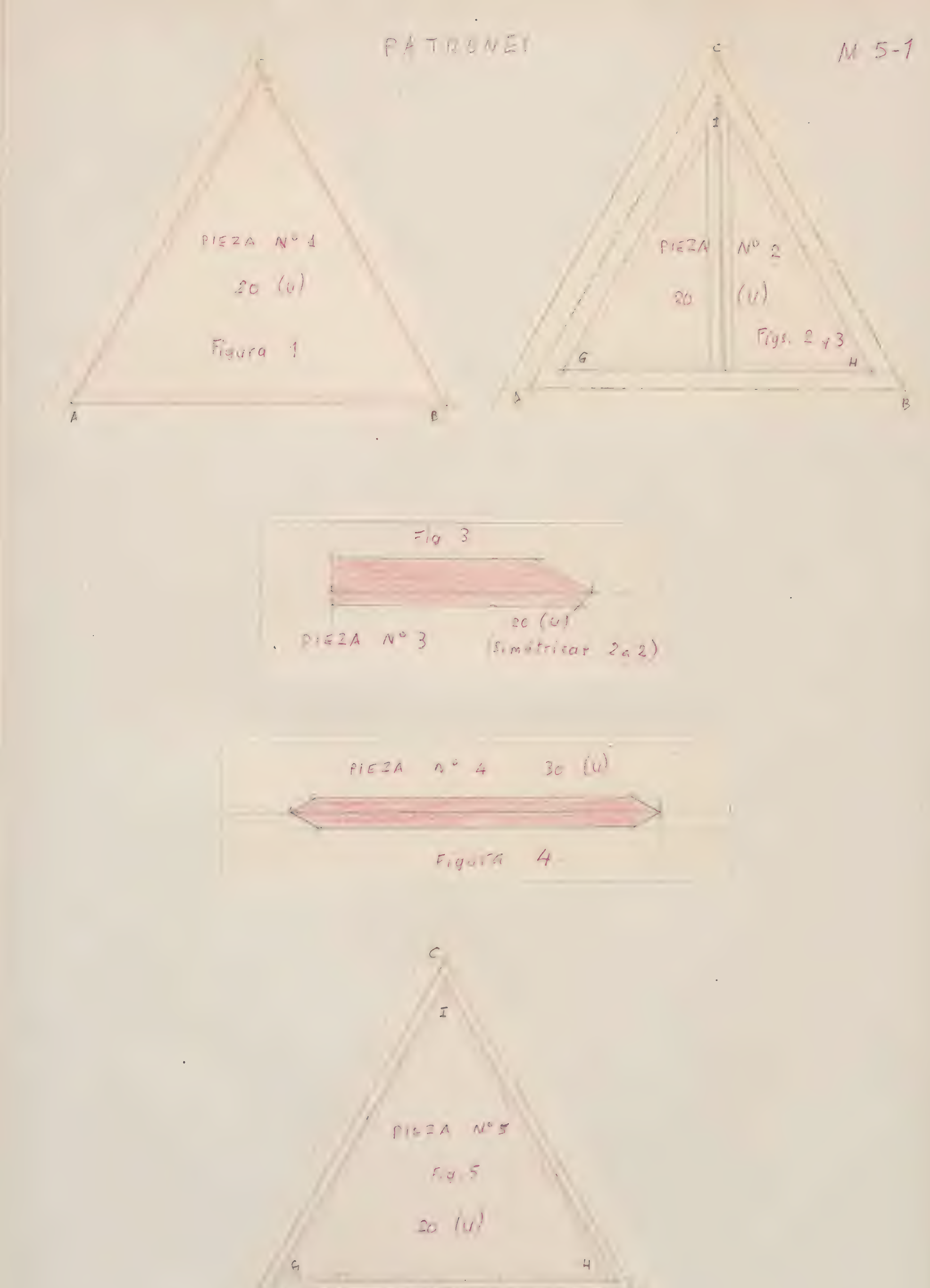
Figura 5

Es un triángulo equilátero, cuyo lado l_3 se deduce del triángulo ABC de la figura 1 (triángulo GHI de la figura 5).

PIEZA Nº 5 20 (u)

Fig. 5




PATRONES
PIEZA Nº 1
20 (u)
Figura 1
A
B
C
I
PIEZA Nº 2
20 (u)
Figs. 2 y 3
G
H
A
B
Fig 3
20 (u)
PIEZA Nº 3
(Simétricas 2 a 2)
PIEZA Nº 4 30 (u)
Figura 4
C
I
PIEZA Nº 5
Fig 5
20 (u)
G
H
A
B

ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 5.101

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular convexo, representado en la lámina 5 del anexo [illegible] S. E.

DATO: Radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro regular pedido.

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

Las características del icosaedro regular convexo, son las siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de vértices	$V = 12$
Número de aristas	$A = 30$
Número de caras en cada vértice	$5\ P_3$

El modelo que se estudia es de caras macizas

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Son triángulos equiláteros, cuyo lado "l_3" es igual a la arista

UNE A 4-210 x 297



a_{20} del icosaedro pedido.

Su valor se obtiene despejando "a_{20}" de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea:

$$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20} \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= r_{ec}^{20} \times \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = r_{ec}^{20} \times \frac{4\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10 + 2\sqrt{5}} = r_{ec}^{20} \times \frac{4\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})^2}}{80} =$$

$$= r_{ec}^{20} \times \frac{\sqrt{[80 \times (10 - 2\sqrt{5})]}}{20} = r_{ec}^{20} \times \frac{4\sqrt{5 \times 2(5 - \sqrt{5})}}{20} = r_{ec}^{20} \times \frac{\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}}{5} =$$

$$\cong 1.05\,14\,62\,22\,4 \ldots \times 110 = \boxed{115.7 \text{ mm}}$$

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1

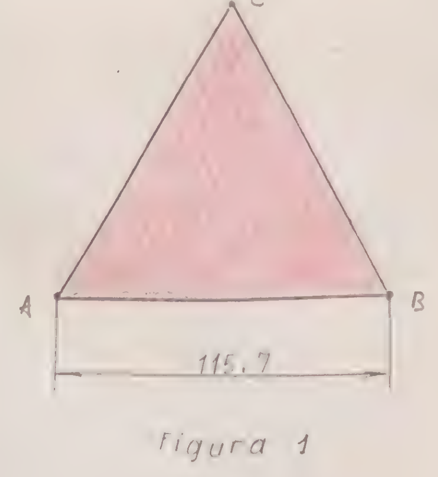


Figura 1

PIEZA Nº 1 20 (U)

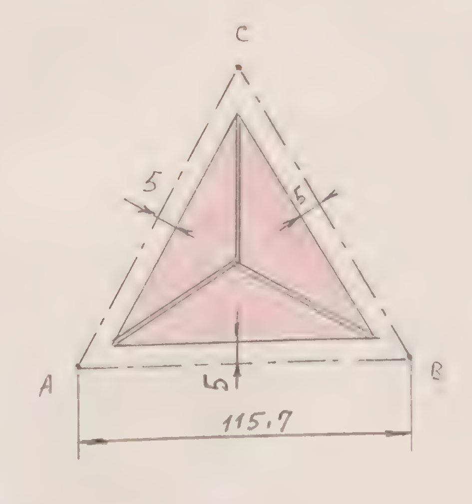
Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR

20 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 2 y se deducen del triángulo ABC de la figura 1





PIEZA Nº 2 20 (u)

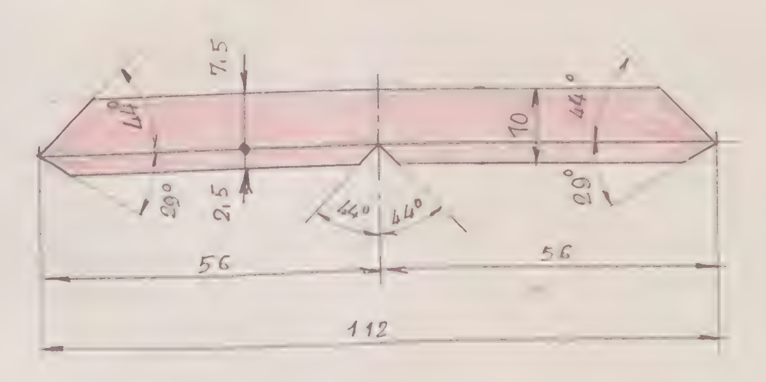
Figura 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR

60 unidades

Se colocan en la dirección de las bisectrices del triángulo ABC de las caras superficiales (fig. 2) y su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

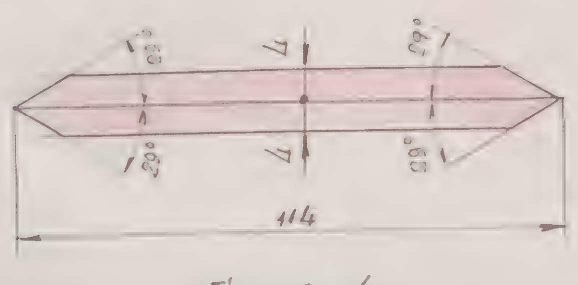


PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades



PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 4

Figura 4

Enero 1979



PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

20 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 5 y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1

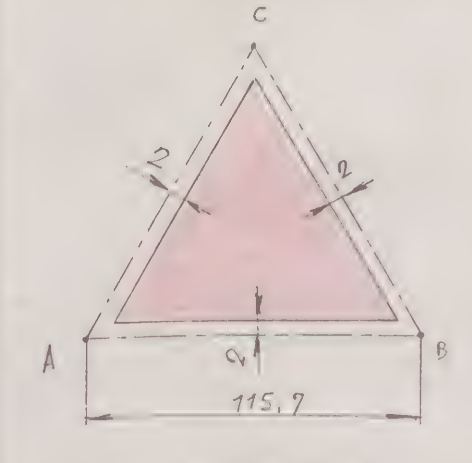


Figura 5

PIEZA Nº 5 20 (u)

Figura 5

ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular convexo, representado en la lámina 5 del ejercicio G.E.

DATO: Radio " r_{ec}^{20} " de la esfera circunscrita al icosaedro regular pedido

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, variante del modelo M - 5.101, con sus mismas dimensiones y características siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de vértices	$V = 12$
Número de aristas	$A = 30$
Número de caras en cada vértice	$5\ P_3$

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº1 CARAS-SUPERFICIALES 20 unidades

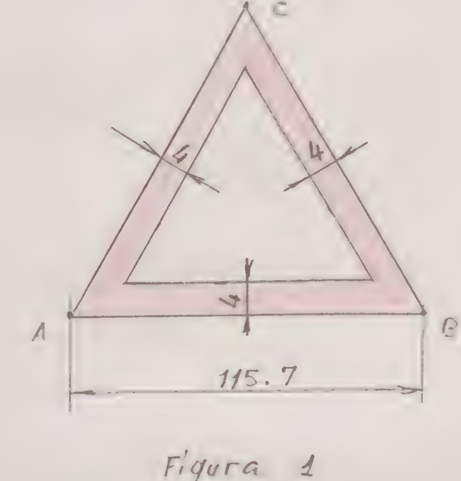
Son triángulos equiláteros cuyo lado "l_3" es igual a la arista a_{20} del icosaedro pedido. Su valor se obtiene despejando a_{20} de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea

Modelo M-5.102

$$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, a_{20} \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= r_{ec}^{20} \times \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5} \simeq 1{,}05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 110 = \boxed{115{,}7\ \text{mm}}$$

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1



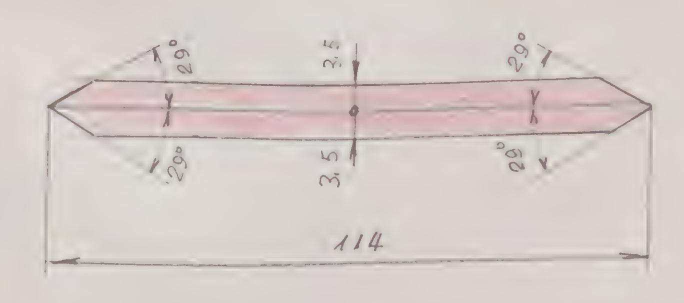
PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_{20} (ver fig. 2) $a_{20} = 115{,}7$ mm. La tomamos igual a 114 mm



PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

Figura 2

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 5.2

ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

UNE A 4-210 x 297

Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 5.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular convexo, representado en la lámina nº 3 del ejercicio G.E. .

DATOS: Radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro regular pedido.

$$r_{ec}^{20} = 76.1 \text{ mm}$$

El modelo corpóreo que se estudia es de caras vaciadas, variante del modelo M - 5.1, con sus mismas dimensiones que éste, y de las características siguientes:

Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
Número de vértices	$V = 12$
Número de aristas	$A = 20$
Número de caras de cada vértice	$5\ P_3$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARA TRIANGULAR 20 unidades

Es un triángulo equilátero de lado l_3 igual a la arista a_{20} del icosaedro pedido.

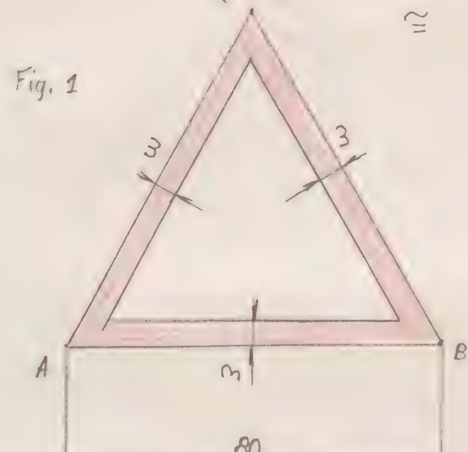


Su valor se obtiene despejando a_{20} de la fórmula nº del ejercicio G.E. , o sea:

$$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, a_{20} \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= r_{ec}^{20} \times \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = r_{ec}^{20} \times \frac{\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{5} \cong 76{,}1 \times 1{,}05\,14\,62\,22\,4\ldots \cong$$

$$\cong 80{,}01\,62\,75\,25\ldots \cong \boxed{80\ mm}$$



PIEZA Nº 1 — 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 — UNIONES ARISTAS — 30 unidades

Su longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_{20} (ver fig. 1; $a_{20} = 80$ mm).- La tomamos igual a 69 mm.

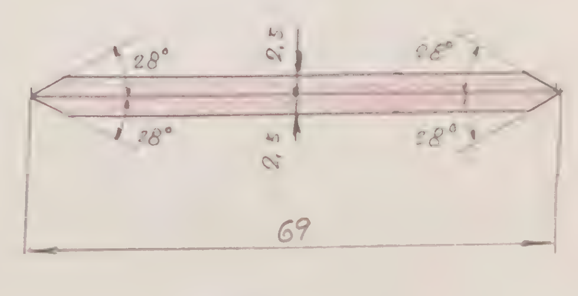


Figura 2

PIEZA Nº 2

Fig. 2

30 (u)

UNE A 4-210 x 297

Calvarro — Octubre 1978



PATRONES



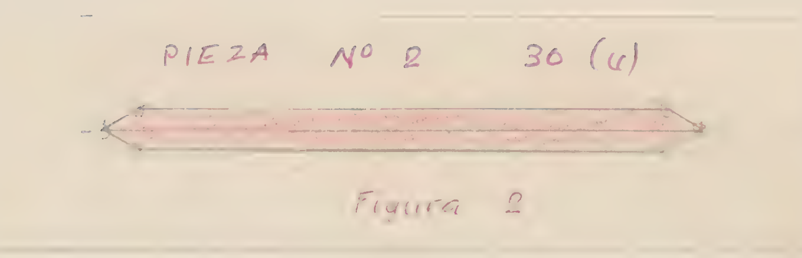


Figura 2

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CUYAS ARISTAS SON IGUALES A LAS DEL ICOSAEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera que pasa por los vértices de los tetraedros regulares:

$$r' = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 5.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas, obtenido al construir sobre cada cara de un icosaedro regular convexo, un tetraedro regular convexo, cuyas aristas son iguales a las del icosaedro generador.

Se tiene como dato único el del radio "r_{ec}^{20}" de la esfera que contiene a los vértices de los tetraedros regulares construidos sobre cada cara del icosaedro generador.

DATO: Radio máximo "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al poliedro pedido.

$$r_{ec}^{20} = 110 \ mm$$

1) PROPIEDADES

De la definición de la generación del poliedro estudiado, dada en su enunciado, vamos a enumerar las propiedades más importantes del mismo, algunas de las cuales son básicas para el cálculo de sus dimensiones.

P1) El poliedro se compone de veinte tetraedros regulares convexos, cuyas bases son triángulos equiláteros, (caras del icosaedro generador) y sus caras laterales son

UNE A 4-210 x 297



también triángulos equiláteros; estos tetraedros tienen las aristas de sus bases, comunes dos a dos.

P2) El número de sus caras C, es:

$$C = 3 \times 20 = \underline{\underline{60 \quad (u)}}$$

El número de sus vértices V es:

a) vértices de los tetraedros = 20

vértices del icosaedro = 12

Total 32 (u)

El número de sus aristas A, es

$$A = \frac{C \times 3}{2} = \frac{60 \times 3}{2} = \underline{\underline{90 \quad (u)}}$$

y aun siendo cóncavo el poliedro pedido, verifica el teorema de Euler para los poliedros convexos:

$$\boxed{C + V = A + 2 = 60 + 32 = 90 + 2 = 92}$$

P3). El radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita, es igual a la suma del radio "r_{ei}^{20}" de la esfera inscrita al icosaedro generador de arista a_{20}, y de la altura "h_4" del tetraedro correspondiente, de arista a_{20}.

$$\boxed{r_{ec}^{20} = r_{ei}^{20} + h_4} \qquad (1)$$

P5) Todas las caras de este poliedro son iguales, en forma de triángulos equiláteros de arista a_{20} del icosaedro generador.

UNE A 4-210 x 297

[signature] Noviembre 1979

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, vamos a hacer uso de ellas para aplicarlas al cálculo analítico de las magnitudes lineales, necesarias para la construcción del poliedro estudiado.

Como fórmulas previas, deducidas en otros ejercicios, recordemos las siguientes:

1º "h_4" = Altura de los tetraedros regulares convexos, construidos sobre cada cara del icosaedro generador, de arista "a_{20}"

$$h_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} \; a_{20} \qquad (2)$$

(Ver ejercicio G.E. .- Lámina 1)

2º "r_{ei}^{20}" = Radio de la esfera inscrita en el icosaedro generador:

$$r_{ei}^{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \; a_{20} \qquad (3)$$

(Ver ejercicio G.E. .- Lámina 5)

Sustituyendo los valores (2) y (3) en (1), tendremos:

$$r_{ec}^{20} = r_{ei}^{20} + h_4 = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a_{20} + \frac{\sqrt{6}}{3} a_{20} = \left[\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} + \frac{4\sqrt{6}}{12} \right] a_{20} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15} + 4\sqrt{6}}{12} \; a_{20}$$ de donde se obtiene finalmente:

$$\Gamma_{ec}^{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15} + 4\sqrt{6}}{12}\, a_{20} \qquad (4)$$

Como el dato del ejercicio es Γ_{ec}^{20}, para obtener "a_{20}" en función de Γ_{ec}^{20}, despejaremos en (4) el valor de a_{20}, por lo que será:

$$a_{20} = \Gamma_{ec}^{20} : \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15} + 4\sqrt{6}}{12} = \frac{12}{3\sqrt{3} + \sqrt{15} + 4\sqrt{6}}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{12}{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{5}\sqrt{3}}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{12}{\sqrt{3}\,(3 + 4\sqrt{2} + \sqrt{5})}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{3\left[(3 + 4\sqrt{2}) + \sqrt{5}\right]}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{4\sqrt{3}}{(3 + 4\sqrt{2}) + \sqrt{5}}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\,(3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(3 + 4\sqrt{2})^2 - 5}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{4\sqrt{3}\,(3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{5})}{9 + 32 + 24\sqrt{2} - 5}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\,(3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{5})}{36 + 24\sqrt{2}}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{3}\,(3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{5})}{9 + 6\sqrt{2}}\, \Gamma_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{5})(9 - 6\sqrt{2})}{81 - 72}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{3}\,(27 + 36\sqrt{2} - 9\sqrt{5} - 18\sqrt{2} - 48 + 6\sqrt{10})}{9}\, \Gamma_{ec}^{20}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(18\sqrt{2} - 21 - 9\sqrt{5} + 6\sqrt{10})}{3}\, \Gamma_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{3}\,(6\sqrt{2} - 7 - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10})}{3}\, \Gamma_{ec}^{20}$$

De donde se obtiene finalmente:

UNE A 4-210 x 297



Modelo M - 5.3

$$\boxed{a_{20}} = \frac{\sqrt{3}\,(6\sqrt{2} - 7 - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10})}{3}\, r_{ec}^{20} \simeq \boxed{0,63\ 60\ 27\ 97\ 1\ldots\ r_{ec}^{20}} \qquad (5)$$

Aplicando la fórmula (5) al caso estudiado, para $r_{ec}^{20} = 110$, tendremos:

$$\boxed{a_{20}} \simeq 0,63\ 60\ 27\ 97\ 1\ldots \times 110 \simeq \boxed{70 \quad mm}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL DE CADA UNO DE LOS VEINTE TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS.

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

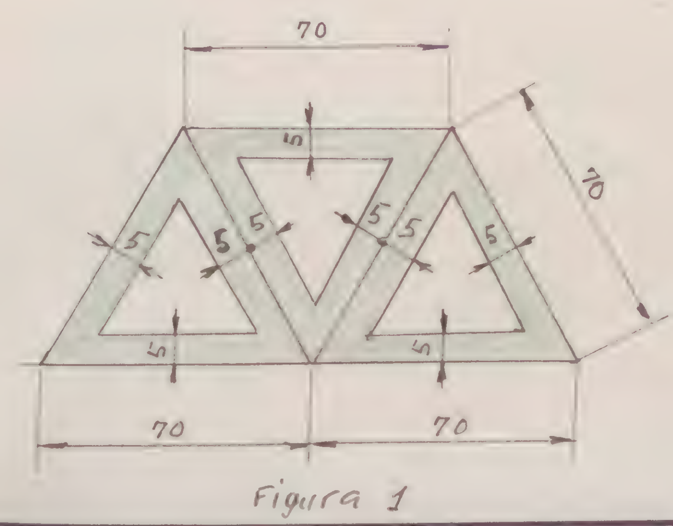


Figura 1

PIEZA Nº 1

20 (u)

Figura 1

UNE A 4-210 x 297

Noviembre 1975

Modelo M- 5.3

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 90 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

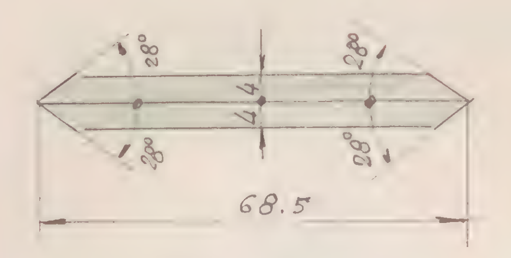


Figura 2

PIEZA Nº 2 90 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES 60 unidades

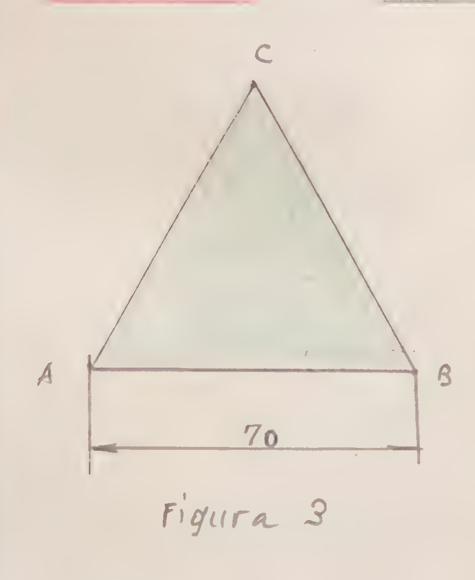


Figura 3

Son triángulos equiláteros. Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO CARAS LATERALES 60 unidades



Figura 4

Su forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las del triángulo ABCA de la figura 3

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 4

Noviembre 1979



PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

60 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del Triángulo ABCD de la figura 3.

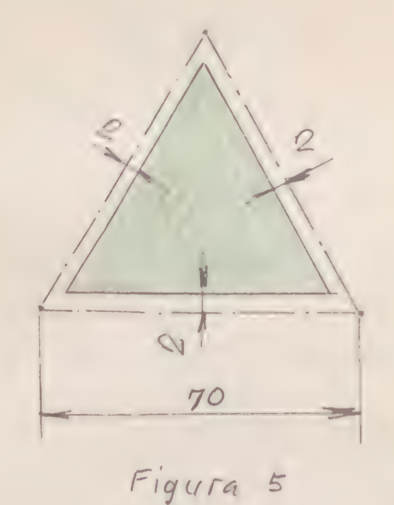


Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

UNE A 4-210 x 297

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

El estudio de este modelo, cuya ley de generación se detalla en el enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo, compuesto de veinte tetraedros regulares convexos acoplados por las aristas inferiores de sus bases que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro son todas de igual longitud, e iguales a su vez a las del icosaedro regular generador "a_{20}".

Los vértices exteriores son puntos que equidistan del centro "O" del icosaedro generador (por ser la altura de los tetraedros regulares, perpendiculares a la las respectivas caras del mencionado icosaedro generador y pasar por el centro de dichas caras.)

Por consiguiente dichos vértices están sobre una esfera circunscrita al poliedro estudiado y son a su vez vértices de un dodecaedro regular convexo circunscrito a aquél (El dodecaedro e icosaedro regulares convexos, son conjugados entre sí).

En el estudio del dodecaedro regular convexo (Ver G.E. , lámina 4) obtuvimos la fórmula

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \, a_{12} \qquad (1)$$

que nos da el valor de la longitud del radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro regular convexo, en función de su arista "a_{12}", de la cual, despejando "a_{12}" podemos obtener la arista en función de r_{ec}^{12}.

UNE A 4-210 x 297



Así pues tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} \times r_{ec}^{12} = \frac{4\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)}{15 - 3} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)}{12} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} \cong \boxed{0.71\ 36\ 44\ 17\ 9 \ldots \times r_{ec}^{12}}$$

que en el poliedro estudiado será:

$$\boxed{a_{12}} \cong 0.71\ 36\ 44\ 17\ 9 \ldots \times 110 \cong \boxed{78,5 \text{ mm}}$$

Para obtener el poliedro resultante de este estudio complementario, puede utilizarse este mismo modelo M- 5,3, completándolo con las aristas "a_{12}" de las caras del dodecaedro regular convexo inscrito.

UNE A 4-210 x 297

PATRONES Modelo M - 5,3

a_{12} = 55,5 mm

a_{12} = 70 mm

EJECUTADO

VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M - 5.3, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES Y CONSTRUIDO: A) EL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS MACIZAS; Y B) EL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 5.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del modelo M-5.3, de igual forma y dimensiones, y construido: A) El icosaedro regular convexo generador, con sus caras macizas; y B) El tetraedro regular convexo, con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M- 5.3.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS MACIZAS Y ARISTA $a_{20} = 70$ m.m

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Son triangulares y equiláteras; su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A 4:210 x 297

Modelo M-5.4

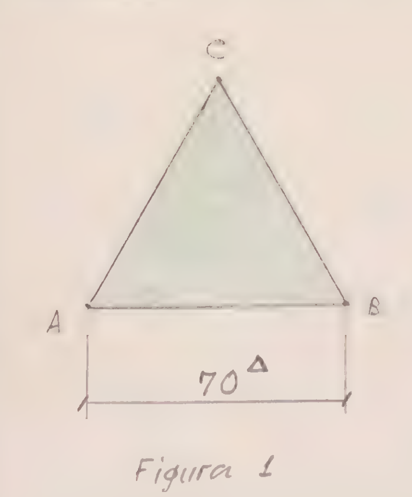


Figura 1

PIEZA Nº 1 20 (U)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Su forma y dimensiones, se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2

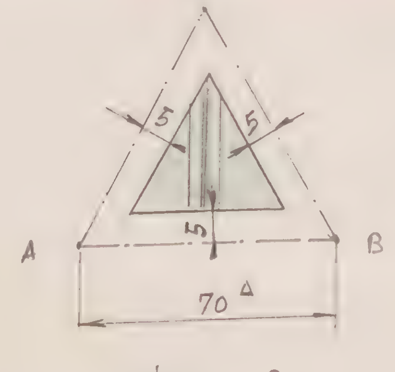


Figura 2.

PIEZA Nº 2 20 (U)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

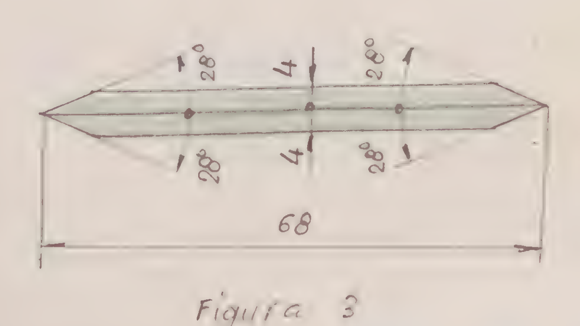


Figura 3

PIEZA Nº3 30 (U)

Figura 3

UNE A 4-210 x 297

Calvane Noviembre 1979

Modelo M- 5.4

PIEZA Nº 4 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 40 unidades

Su colocación se detalla en la figura 2; su forma y dimensiones en la figura 4.

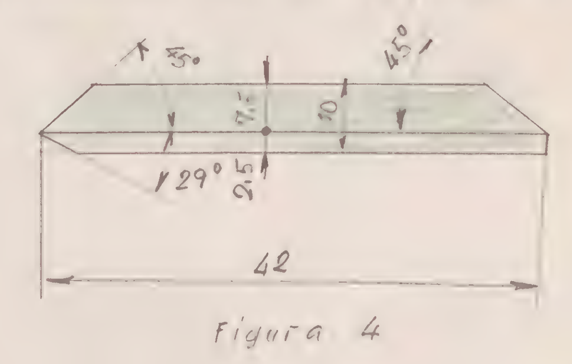


Figura 4

PIEZA Nº 4

40 (u).- simétricas 2 a 2.

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 5.

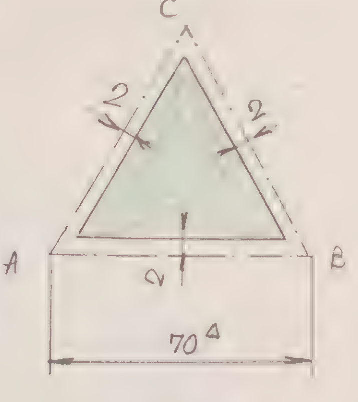


Figura 5

PIEZA Nº 5 20 (u)

Figura 5

B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CON SUS CARAS VACIADAS, DE ARISTA $a_4 = 70$ mm

PIEZA Nº 6 DESARROLLO LATERAL DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6.

PIEZA Nº 6 20 (u)

Figura 6

Figura 6.

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

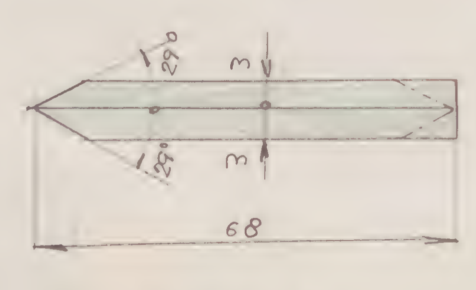


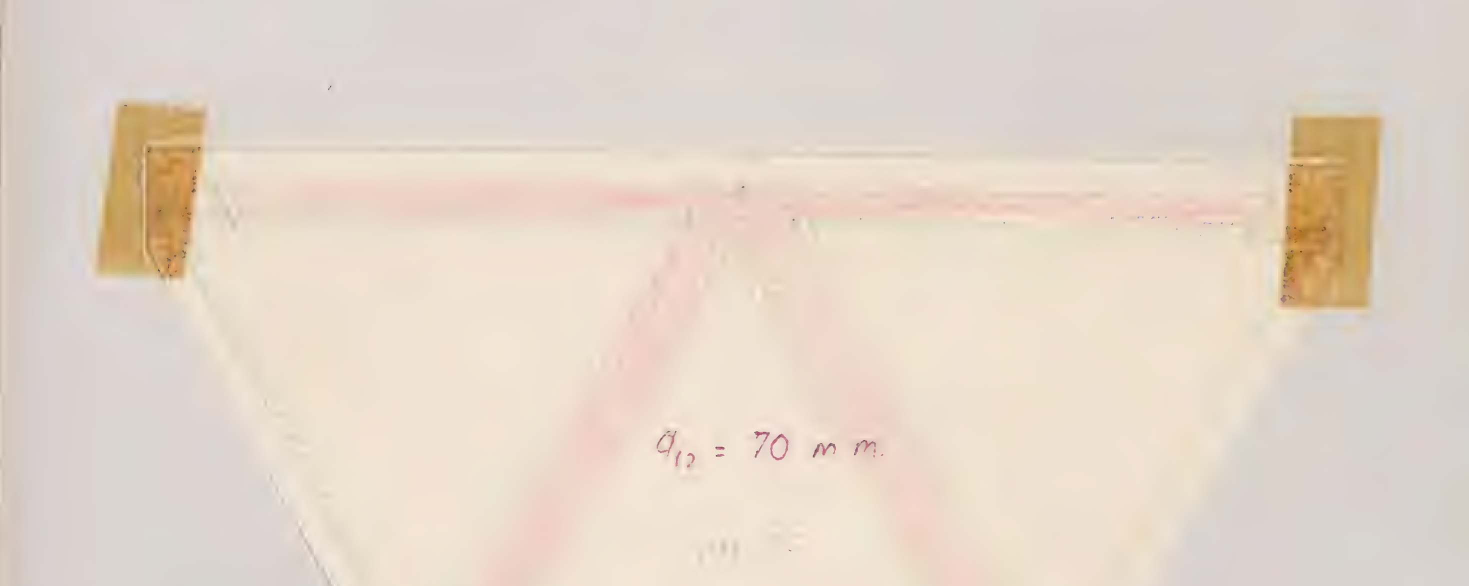
Figura 7

PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

PATRONES

Modelo M - 5.4





a_{12} = 55,5 mm



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO DE CARAS MACIZAS, OBTENIDO AL CONSTRUIR SOBRE CADA CARA DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, Y HACIA SU EXTERIOR, UN PRISMA REGULAR RECTO, CUYA BASE ES DICHA CARA, Y SUS CARAS LATERALES SON CUADRADOS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 m m.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 5,5

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo de caras macizas, obtenido al construir sobre cada cara de un icosaedro regular convexo, y hacia su exterior, un prisma regular recto, cuya base es dicha cara, y sus caras laterales son cuadrados.

Se tiene como dato único el del radio "r_{ee}^{20}" de la esfera circunscrita, que contiene todos los vértices exteriores (vértices de los triángulos equiláteros de las bases del prisma opuestas a las caras del icosaedro generador.)

$$r' = 110 \text{ mm}$$

1) PROPIEDADES

De la definición de este poliedro, se deducen las siguientes propiedades que enunciamos a continuación, siendo algunas de ellas, básicas para el cálculo de sus dimensiones.

P1) Los prismas rectos construidos sobre cada cara del icosaedro generador, son de bases triangular equilátera, siendo a su vez cuadradas sus tres caras laterales; por con-

siguiente, dichos prismas, serán rectos, triangulares, regulares y convexos, siendo todas sus aristas iguales a la "a_{20}" del icosaedro generador.

P2) El poliedro pedido, se compone de 20 prismas rectos triangulares, regulares y convexos, y tiene las aristas "a_{12}" de sus bases inferiores, comunes dos a dos.

P3) El número de sus caras, será

$C_3 = 1 \times 20 = 20$ caras triangulares
$C_4 = 3 \times 20 = 60$ caras cuadradas
Total = 80 caras

El número de sus vértices, será:

En las bases superiores $= 3 \times 20 = 60$
En las bases inferiores $= 12$
Total 72 vértices

El número de aristas, será:

En las bases superiores $= 3 \times 20 = 60$
En las bases inferiores $= \frac{1}{2} \times 3 \times 20 = 30$
En las caras laterales $= 3 \times 20 = 60$
Total 150 aristas

En resumen este poliedro tiene:

C = 80 caras
V = 72 vértices
A = 150 aristas

UNE A 4-210 x 297

y verifica también el Teorema de Euler para poliedros convexos.

$$C + V = 80 + 72 = 152 = A + 2 = 150 + 2$$

P4) La altura "h_3" del prisma recto, regular, triangular, construido sobre cada cara del icosaedro generador de arista a_{20}, es:

$$h_3 = a_{20} \qquad (1)$$

P5) Si unimos un vértice "V" de la base superior del prisma recto anterior, con el centro "C" del triángulo de dicha base; a continuación éste con el centro "O" del icosaedro generador, y finalmente "V" con "O", se nos formará el triángulo rectángulo "VCO" de ángulo recto "C" en el que la hipotenusa "$\overline{VO}$" será el radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita al poliedro estudiado; el cateto "$\overline{VC}$", será el radio "r_{c-3}" de la circunferencia circunscrita a la cara triangular exterior; el otro cateto "$\overline{CO}$" es la suma del radio "r_{ei}^{20}" de la esfera inscrita en el icosaedro generador, y la altura "h_3" del prisma.

Por consiguiente, tendremos:

$$\overline{VO} = r_{ec} \qquad \overline{VC} = r_{c-3} \quad ; \qquad \overline{CO} = r_{ei}^{20} + h_3$$

verificándose que:

$$\overline{VO}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CO}^2 \qquad (2)$$

donde sustituyendo valores, será:

$$\boxed{r_{ec} = \sqrt{(r_{c-3})^2 + (r_{ei}^{20} + h_3)^2}} \qquad (3).$$

Para desarrollar la fórmula (3) sustituyamos en ella los siguientes valores en función de "a_{20}"

1°) "r_{c-3}" = Radio de la circunferencia circunscrita a la base triangular exterior del prisma recto, de lado $l_3 = a_{20}$

$$r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ a_{20} \qquad (4)$$

(Ver ejercicio G.P. 1.400-42)

2°) "r_{ei}^{20}" = Radio de la esfera inscrita al icosaedro generador, en función de su arista "a_{20}".

$$r_{ei}^{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\ a_{20} \qquad (5)$$

(Ver ejercicio G.E. - Lámina 5)

3°) $$h_3 = a_{20} \qquad (6)$$

Ver fórmula (1), de este ejercicio (pág. h3)

Sustituyendo en (3) los valores (4), (5) y (6), tendremos:

UNE A 4-210 x 297

[illegible signature] Noviembre 1979



Modelo M - 5.5

$$r_{oc} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} d_{20}\right)^2 + \left[\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} d_{20} + d_{20}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{9} + \left[\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} + 1\right]^2}\ d_{20} = \sqrt{\frac{1}{3} + \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\right)^2 + 1 + \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times 2}\ d_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}{12^2} + 1 + \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}}\ d_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{27 + 15 + 6\sqrt{45}}{12^2} + 1 + \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}}\ d_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{42 + 6 \times 3\sqrt{5}}{12^2} + 1 + \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}}\ d_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2 \times 12} + 1 + \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}}\ d_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{24} + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24} + \frac{24}{24} + \frac{12\sqrt{3}+4\sqrt{15}}{24}}\ d_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{8 + 7 + 3\sqrt{5} + 24 + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{15}}{24}}\ d_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{39 + 3\sqrt{5} + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{15}}{24}}\ d_{20} \cong 1,84\ 82\ 50\ 82\ 8 \ldots\ d_{20}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{r_{oc} = \sqrt{\frac{39 + 3\sqrt{5} + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{15}}{24}}\ d_{20}} \cong$$

$$\cong 1,84\ 82\ 50\ 82\ 8 \ldots\ d_{20} \qquad (7)$$

UNE A 4·210 x 297

Eduardo Noviembre 1979

Despejando en la fórmula (7) el valor de "a_{20}", tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = 1 : \sqrt{\frac{39 + 3\sqrt{5} + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{15}}{24}}\ r_{ec} =$$

$$= \sqrt{\frac{24}{39 + 3\sqrt{5} + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{15}}}\ r_{ec} \cong \boxed{0{,}54\ 10\ 52\ 10\ 4 \ldots\ r_{ec}} \quad (8)$$

Fórmula que nos permite calcular la arista del poliedro estudiado, en función del radio "r_{ec}" de la esfera circunscrita dado (r_{ec} = 110 m m)

Aplicando la fórmula (8), podemos construir los polígonos que forman sus caras (triángulos equiláteros y cuadrados de igual lado; $l_3 = l_4 = a_{20}$).

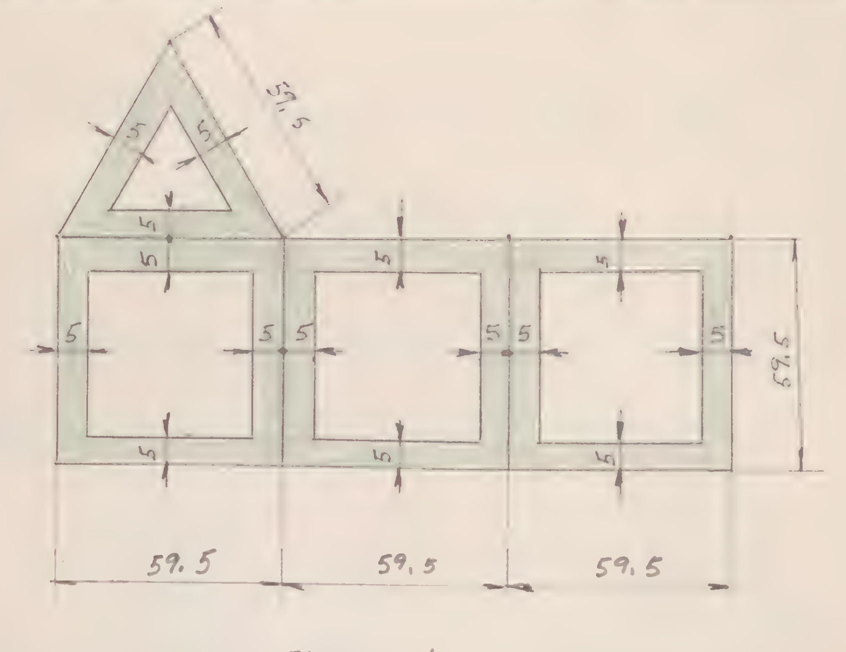
En el modelo estudiado, será:

$$\boxed{a_{20}} \cong 0{,}54\ 10\ 52\ 104 \ldots \times 110 \cong \boxed{59{,}5\ \text{m m}}$$

Dicho modelo, de caras macizas, se compondrá de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 DESARROLLO LATERAL Y BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura número I



PIEZA Nº 1

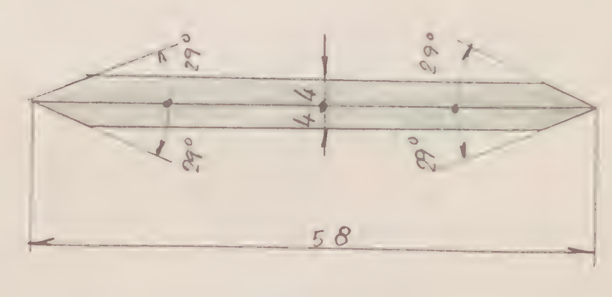
20 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 150 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2



PIEZA Nº 2 150 (u)

Figura 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 FORRO MACIZO DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 60 unidades

D C

A B

59.5 □

Figura 3

Son cuadrados, cuya forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 3

Alvarez Noviembre - 1979

UNE A 4-210 x 297

PIEZA Nº 4 FORRO MACIZO DE LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 20 unidades

Son triángulos equiláteros, cuya forma y dimensiones se detallan en la figura 4.

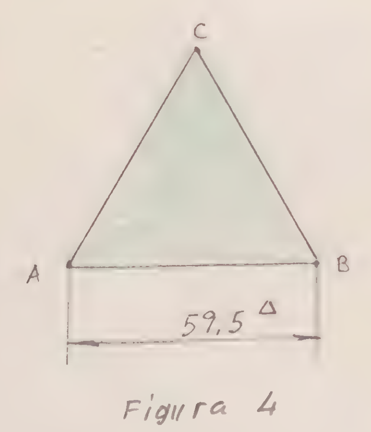


Figura 4

PIEZA Nº 4 20 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR

60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCDA de la figura 3, y se detallan en la figura 5

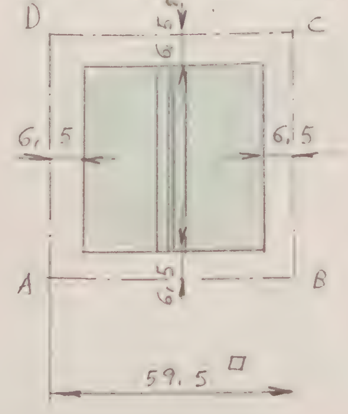


Figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

Modelo M - 5.5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR

20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABCA de la figura 4, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 6 20 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR

120 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 5.

PIEZA Nº 7 120 (u)

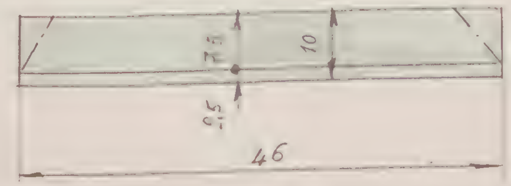


Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN LAS CARAS LATERALES DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado

Modelo M- 5.5

ABCDA de la figura 3, y se detallan en la figura 8

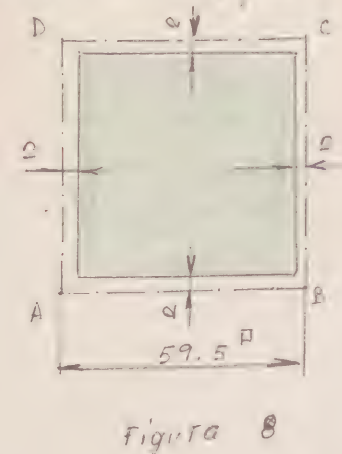


Figura 8

PIEZA Nº 8 60 unidades

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN LA BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABCA de la figura 4, y se detallan en la figura 9.

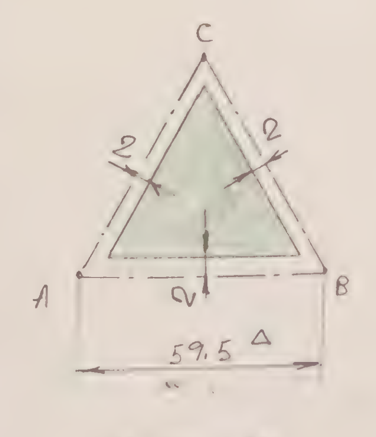


Figura 9

PIEZA Nº 9 20 (u)

Figura 9

(sigue)

ESTUDIO COMPLEMENTARIO

El estudio de este modelo corpóreo, cuya ley de generación se detalla en su enunciado, nos ha conducido a la obtención de un poliedro cóncavo, compuesto de veinte prismas rectos triangulares regulares, acoplados por las aristas inferiores de sus bases, que son comunes dos a dos.

Las aristas de este poliedro, todas de igual longitud, e iguales a las del icosaedro regular convexo generador "a_{20}" son de dos clases. En la primera se incluyen las correspondientes a las dos bases de cada prisma triangular, y en la segunda las de las caras laterales de dichos prismas.

En cada arista de las bases superiores, concurren una cara triangular (la propia base superior) y otra cuadrada (cara lateral del prisma), perpendiculares entre sí.

En cada arista de las bases inferiores, concurren dos caras cuadradas, y el diedro "2 β" formado por ellas, es suplementario al diedro "2 φ" de dos caras contiguas del icosaedro generador; ya que los respectivos lados de sus rectilíneos correspondientes son perpendiculares entre sí, por ser las caras laterales de los prismas triangulares, perpendiculares a las del icosaedro generador.

Si unimos ahora convenientemente dos a dos los vértices de los triángulos de las bases superiores de los prismas triangulares, obtendremos 12 caras pentagonales regulares, asociadas a cada vértice del icosaedro generador, y otras 30

caras rectangulares asociadas a cada arista del mencionado icosaedro generador.

Estas nuevas caras, juntamente con las de las bases superiores de los prismas triangulares, forman un poliedro convexo de las siguientes características:

a) Caras triangulares regulares = 20

b) Caras pentagonales regulares = 12

c) Caras rectangulares = 30

Total = 62 caras

d) Aristas de las caras a) $= \frac{20 \times 3}{2} = 30$

e) Aristas de las caras b) $= \frac{12 \times 5}{2} = 30$

f) Aristas de las caras c) $= \frac{30 \times 4}{2} = 60$

Total = 120 aristas

g) Vértices = 3 × 20 = 60 vértices

Verificándose el teorema de Euler para los poliedros convexos:

$$C + V = A + 2 \qquad 62 + 60 = 120 + 2 = 122$$

Las caras pentagonales son regulares, de lado l_5 menor que la arista a_{20} del icosaedro generador.

$$l_5 < a_{20} \qquad (1)$$

Las caras rectangulares tienen dos de sus lados iguales a las aristas "a_{20}" (los correspondientes a las caras contiguas a las bases superiores de los prismas triangulares); y los otros dos, iguales a "l_5" (los correspondientes a las caras contiguas pentagonales).

La longitud de la arista "l_5" se deduce del cálculo siguiente, basado en las consideraciones anteriores.

En efecto: Consideremos la sección recta producida por un plano perpendicular a una arista cualquiera de las bases inferiores del prisma triangular regular, y dada en el extremo de dicha arista.

Esta sección se detalla en la figura 10, en la que aparece el rectilíneo "2 φ" del diedro formado por dos caras contiguas del icosaedro generador, y las dos aristas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, de dos prismas triangulares regulares que forman el ángulo "2 β", rectilíneo del diedro suplementario del "2 φ".

Figura 10

Si tomamos ahora las longitudes $OA = OB = a_{20}$, el segmento $\overline{AB}$ será el lado "l_5" de las caras pentagonales regulares, y al mismo tiempo igual al lado l_5 de la cara rectangular (ver fórmula 1).



Modelo M- 5.5

En el estudio del icosaedro regular convexo (ver lám. 5) obtenemos el valor del ángulo φ por la siguiente fórmula:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$$; de aquí

$$\varphi = \operatorname{arc.\,sen} \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} = 69^\circ,09\;48\;42\;55$$ de donde

$$2\varphi = 138^\circ,18\;96\;85\;1 = 138^\circ\;11'\;22'',86\;63\;6$$;

$$2\beta = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - 138^\circ,18\;96\;85\;1 = 41,81\;03\;14\;9 =$$

$$= 41^\circ\;48'\;37'',13\;36\;4$$ de donde

$$\beta = 20,90\;51\;57\;45 = 20^\circ\;54'\;18'',56\;68\;2$$

De la figura 9, se deduce:

$$\boxed{\overline{AB}} = 2\,(\overline{AO}\ \operatorname{sen}\beta) = 2 \operatorname{sen}\beta\ a_{20} = 2 \times 0,35\;68\;22\;09\ a_{20} =$$

$$= \boxed{0,71\;36\;44\;18\ a_{20}} = 0,71\;36\;44\;18 \times 1,54\;10\;52\;10\;4 \times 110 =$$

$$= 42,47\;30\;55\;36 \simeq \boxed{42,5\ \text{mm}}$$ por lo que tendremos finalmente

$$\boxed{AB = l_5 = 0,71\;36\;44\;18\ldots\ a_{20}} \qquad (2)$$

De la fórmula (2) se deduce que la arista l_5 es menor que la a_{20}, (aproximadamente $0,7 \times a_{20}$)

UNE A 4-210 x 297

Calvarro Diciembre 1979



Modelo M- 5.5

El modelo corpóreo del poliedro convexo que se obtendría como consecuencia de este estudio complementario, podría parecer en principio, igual al desarrollado en el estudio del Arquimediano VI (Lámina 38), compuesto de:

(1) 20 caras triangulares
(2) 30 caras cuadradas
(3) 12 caras pentagonales
(4) 120 aristas

} Todas regulares y aristas iguales.

y concurren en cada vértice: $1 P_3 + 2 P_4 + 1 P_5$

Las condiciones (1), (3) y (4) se cumplen en el poliedro estudiado, pero no la (2) (las caras de éste no son cuadradas, sino rectangulares de lados a_{20} y $l_5 < a_{20}$)

Por otra parte, tampoco son iguales entre sí todas las aristas, como lo son en el Arquimediano VI (condición (4)), y a su vez, los lados de los pentágonos regulares, son de menor longitud que los de las caras triangulares.

En resumen, el poliedro estudiado en este estudio complementario "no es un Arquimediano VI", aun cuando pueden confundirse a simple vista.

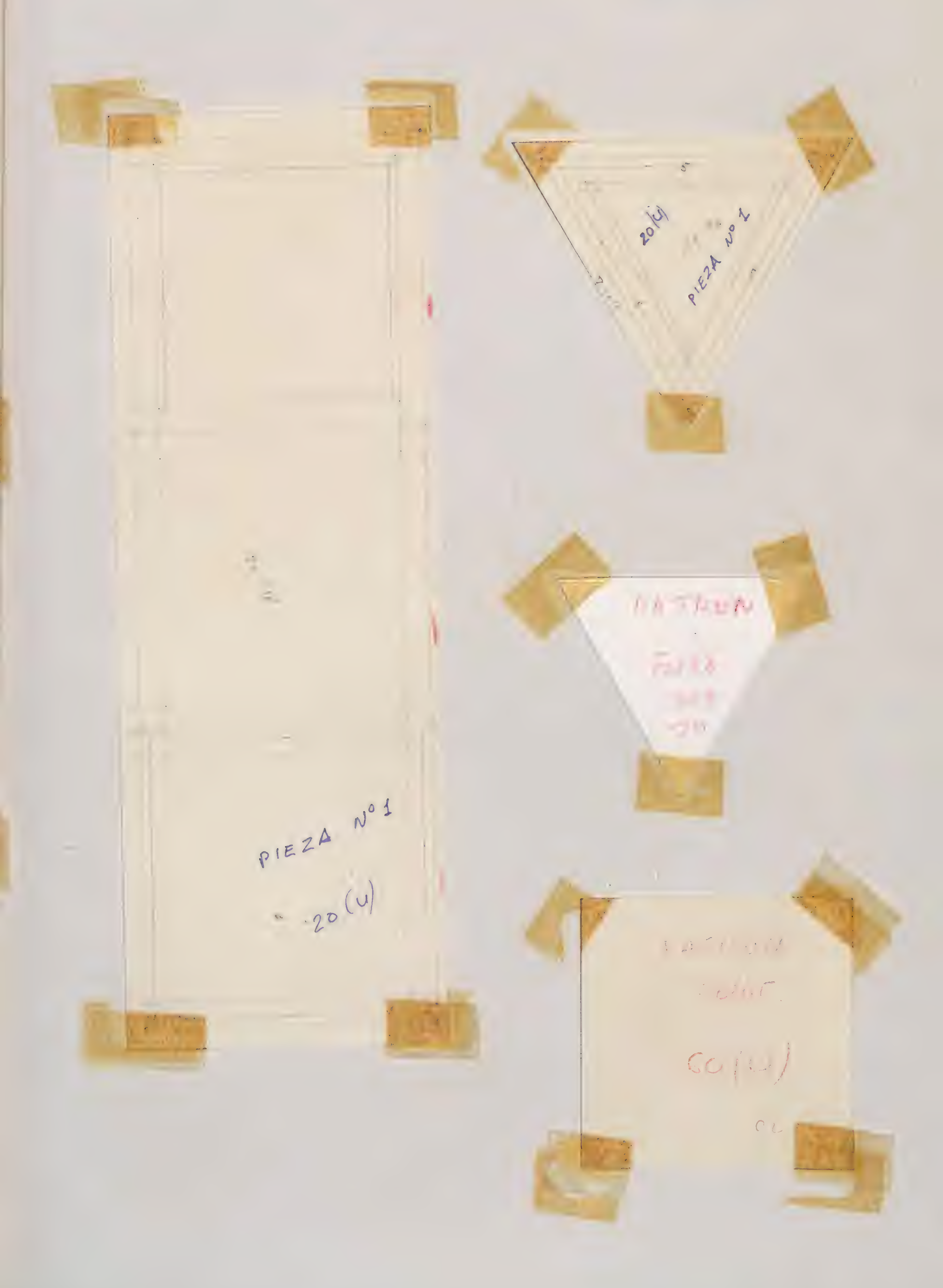
Para obtener este poliedro, puede utilizarse este mismo modelo M- 5.5, completándolo con las aristas $l_5 = 42,5$ mm, de las caras pentagonales regulares, que es lo que hemos realizado en dicho modelo corpóreo

C. Alvarez   Diciembre 1979

UNE A 4·210 x 297

MODELO M- 5.5

Patrones



VARIANTE DEL POLIEDRO CÓNCAVO M-5.5, DE IGUAL FORMA Y DIMENSIONES, Y CONSTRUIDO: A) EL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, CON SUS CARAS MACIZAS; Y B) EL PRISMA RECTO TRIANGULAR REGULAR, CON SUS CARAS VACIADAS. ——

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A 4-210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-5.6

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la variante del poliedro cóncavo M-5.5, de igual forma y dimensiones, y construido: A) El icosaedro regular convexo generador, con sus caras macizas; y B) El prisma recto triangular regular, con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M-5.5.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, DE CARAS MACIZAS Y ARISTA 59,5 mm.

PIEZA Nº 1 — CARAS SUPERFICIALES — 20 unidades

C

A B

59.5

Figura 1

Son triángulos equiláteros; su forma y dimensiones se detallan en la fig. 1.

PIEZA Nº 1 — 20 (u)

Figura 1

Calvario — Diciembre 1979

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2

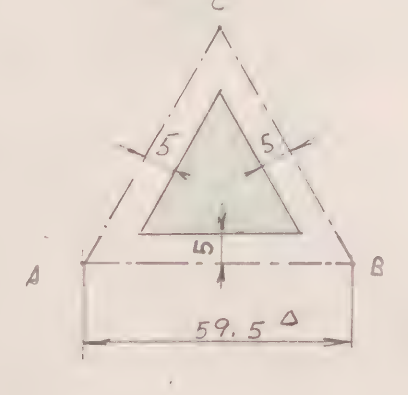


Figura 2

PIEZA Nº 2 20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

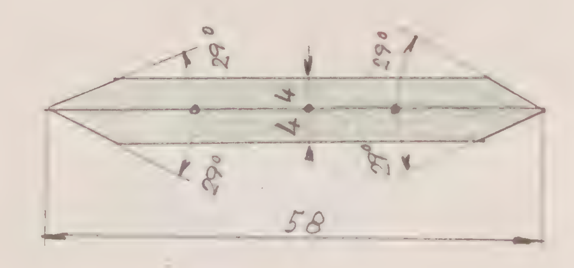


Figura 3

PIEZA Nº 3 30 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 FORRO COLOREADO 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la fig. 4

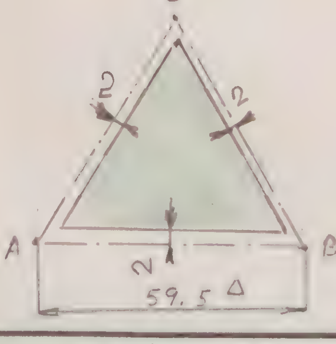


Figura 4

PIEZA Nº 4 20 (u)

Figura 4

Modelo M - 5.6

B) PRISMA TRIANGULAR RECTO, DE CARAS LATERALES CUADRADAS, CON SUS CARAS VACIADAS, DE ARISTA $a_3 = 59.5$ mm

PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL Y BASE SUPERIOR DEL PRISMA RECTO TRIANGULAR

20 unidades

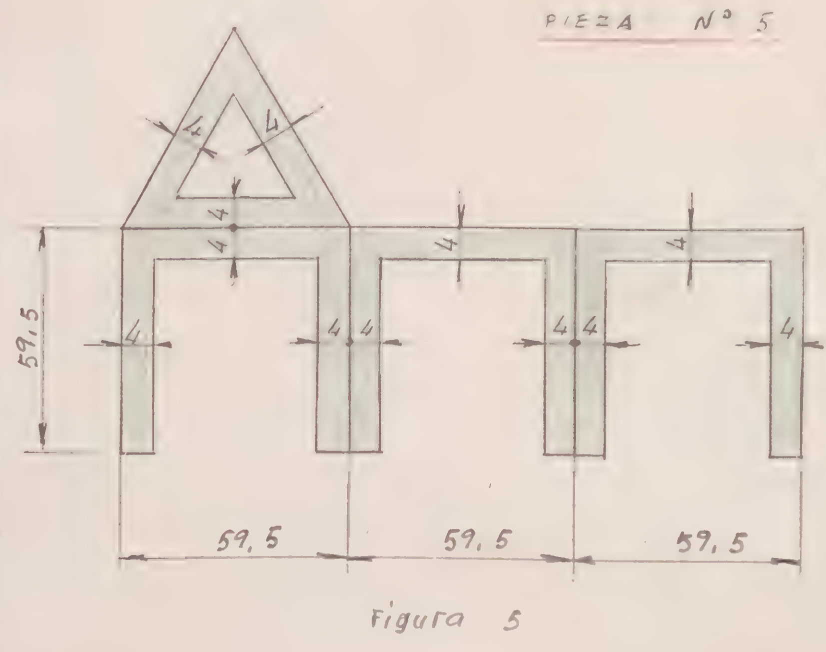


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 20 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 60 unidades
(en caras laterales)

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura 6

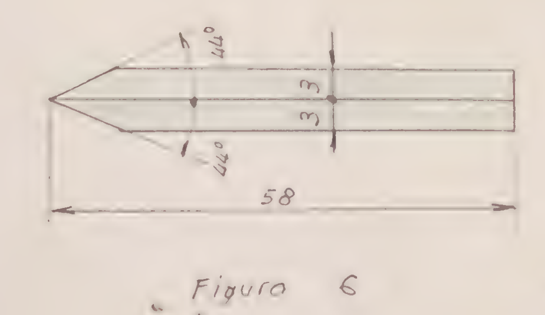


Figura 6

PIEZA Nº 6 60 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 60 unidades
(en bases superiores)

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura 7

Modelo M - 5.6

PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

44°

44°

3,3

44°

44°

58

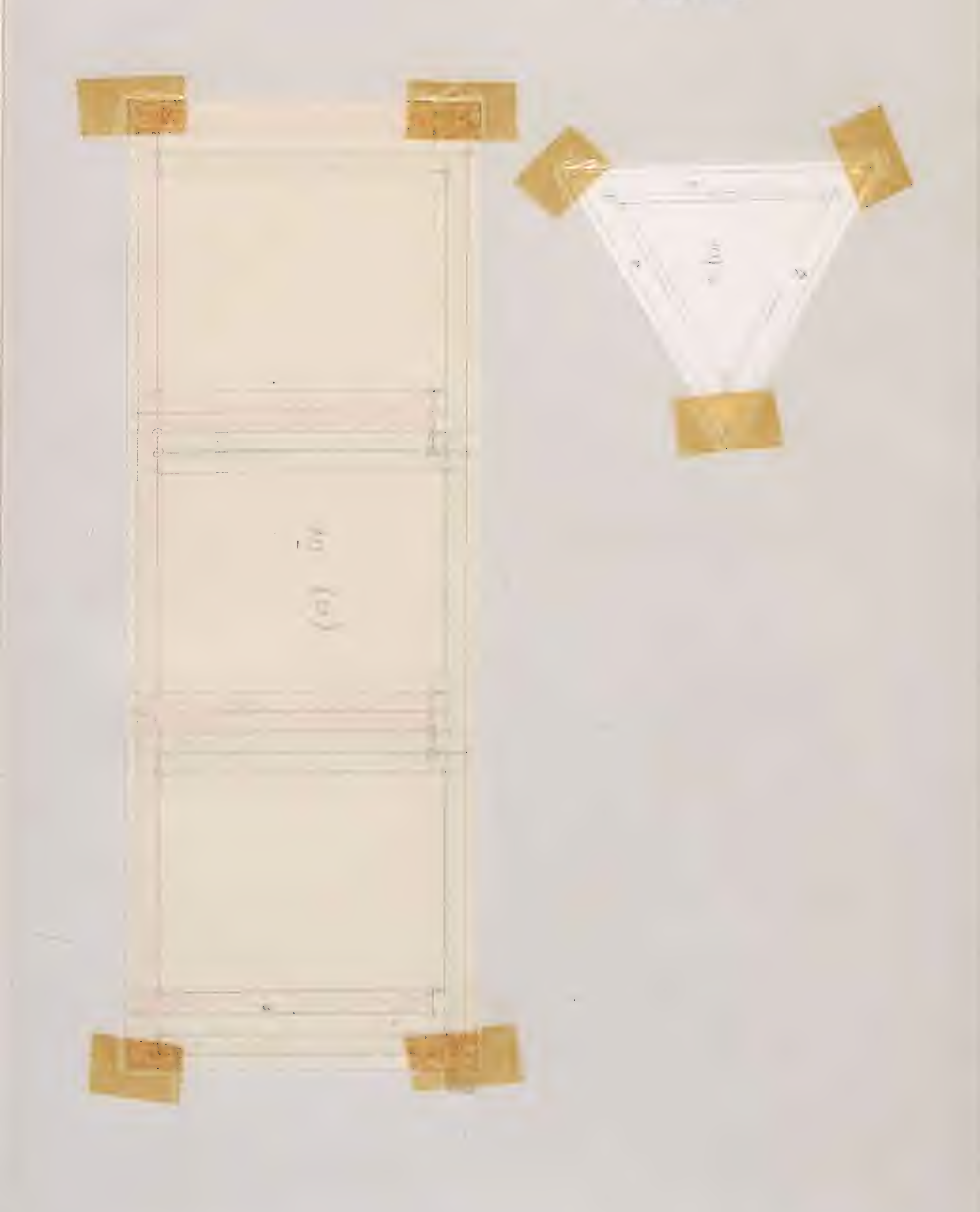
Figura 7

UNE A 4-210 x 297

Alvarez Diciembre 1979

MODELO M-5.6

Patrones



ESTE MODELO ES IGUAL AL

M - 10.2

UNE A4 210 x 297

MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE MUESTRA LAS RELACIONES EXISTENTES ENTRE LOS CINCO POLIEDROS REGULARES CONVEXOS.

Radio de la esfera inscrita al icosaedro regular exterior:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo en el que se muestra las relaciones mutuas existentes entre los cinco poliedros regulares convexos.

Partiendo del icosaedro regular convexo, pueden obtenerse los cuatro poliedros regulares convexos restantes, que quedarán situados sin interferencia mutua, (o sea que no se intersectan entre sí) en el interior del icosaedro considerado.

Estas relaciones se aprecian en el modelo estudiado, que contiene los siguientes poliedros regulares:

A) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas, de arista a_{20} y radio r_{ec}^{20} de su esfera circunscrita.

B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas, de arista a_{12}°, conjugado del icosaedro A) y obtenido al unir los centros de las caras de éste.

C) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas, de arista a_6, inscrito en el dodecaedro B).

D) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas, de arista a_3, inscrito en el exaedro C) y a su vez

UNE A4:210 x 297

$a_{20} = 1.0515 \times 110 =$	115,66	r_{ec} = 110 azul
$a_{12} = 0.5671 \times 110 =$	62,38	r_{ec}^{12} = 87,41 blanco
$a_6 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times 62.38 =$	100,93	r_{ec}^{6} = 87,41 amar.
$a_4 = \sqrt{2} \times 100,93 =$	142,74	r_{ec}^{4} = 87,41 verde
$a_8 = \frac{142,74}{2} =$	71,37	r_{ec}^{8} = 33.64 rojo

pirámides pent. - ~~verde claro~~ celeste

Modelo de los 5 poliedros reg.

convexos

Arquimediano; arista $= \frac{115.66}{3} = 38,55 = 38,6$

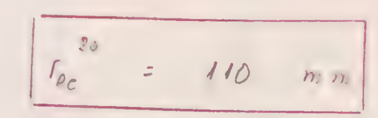
Modelo M - E.3

inscrito en el dodecaedro B).

E) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras macizas, de arista a_8, obtenido al unir los centros de las aristas del tetraedro D).

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

r_{ec}^{20} : Radio de la esfera circunscrita al icosaedro A):



$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas

A) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas:

A1) Arista "a_{20}" del icosaedro, en función de r_{ec}^{20}.

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$", obtenida en el ejercicio G.E. nº.....- Lámina 5. - Despejando en ella a_{20}, tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = 1 : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} r_{ec}^{20} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} =$$

UNE A4 210 x 297

Álvarez [illegible] 1981



Modelo M-5.B

$$= \sqrt{\frac{16}{10 + 2\sqrt{5}}}\; r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{8}{5 + \sqrt{5}}}\; r_{ec}^{20} = 2 \times \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{5}}}\; r_{ec}^{20} = 2 \times \sqrt{\frac{2\,(5 - \sqrt{5})}{20}}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{2 \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20}} \qquad (1)$$

La fórmula (1), aplicada al caso estudiado, nos dará:

$$\boxed{a_{20}} = 2 \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \cong 1{,}05\,14\,62\,22\,4\ldots \times 110 = \boxed{115{,}7 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

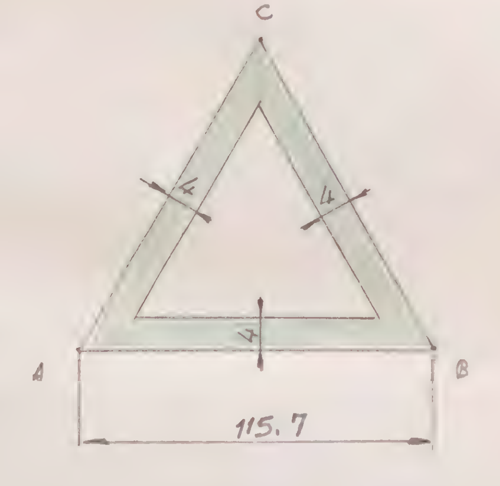


Figura 1

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

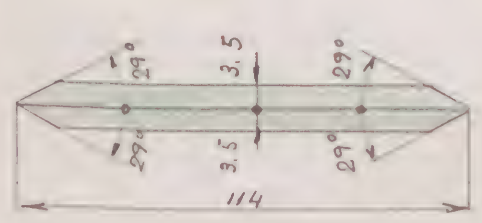


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 20 (u)

Figura 2

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1981



B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas, de arista "a'_{12}", conjugado del icosaedro A), y obtenido al unir los centros G de las caras de éste.

De la generación de este dodecaedro regular, se deduce que el mismo ha de quedar situado en el interior del icosaedro regular, de forma tal que los vértices del dodecaedro quedarán coincidentes con los centros G de las caras del icosaedro generador.

Para poder situar materialmente en su posición correcta el dodecaedro en el interior del icosaedro, construiremos sobre las doce caras pentagonales del mencionado dodecaedro conjugado, otras tantas pirámides auxiliares, rectas, regulares, de base pentagonal, y caras vaciadas, cuyos vértices servirán de apoyo a los doce vértices del icosaedro generador.

Esta solución es igual que la realizada en el estudio del modelo M-10.2, que puede servir para el de este modelo, y siendo además de iguales dimensiones, podemos tomar como base de éste sus mismos cálculos, de los que emplearemos algunos de ellos.

B1) Arista "a'_{12}" del dodecaedro conjugado

Su valor es "$a'_{12} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20}$" deducido en el ejercicio M-10.2 (fórmula (3)). Tendremos pues:



Modelo M-5.8

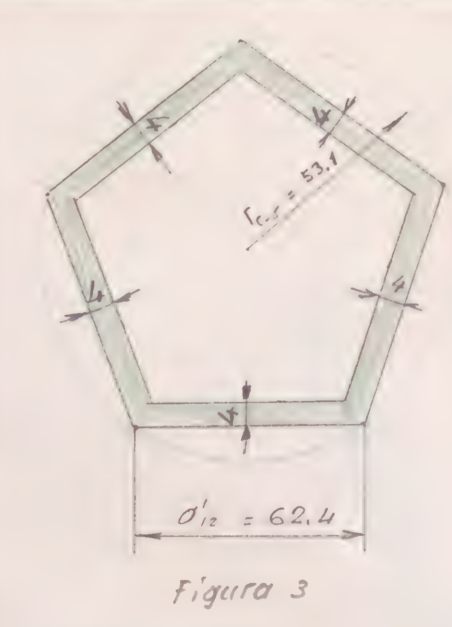


Figura 3

PIEZA Nº 3

12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

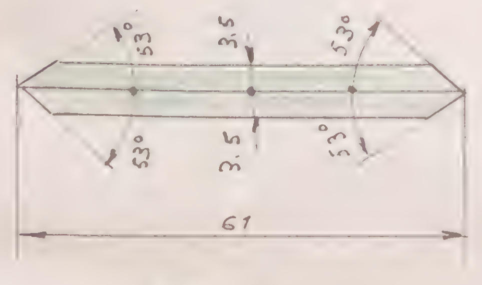


Figura 4

PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES PENTAGONALES, RECTAS, REGULARES DE CARAS VACIADAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 5 de la página siguiente:



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = 62.4$ mm

PIEZA Nº 5

12 (u)

Figura 5

D C E B A A 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

$a_5 = 66.8$

$a'_{12} = 62.4$

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

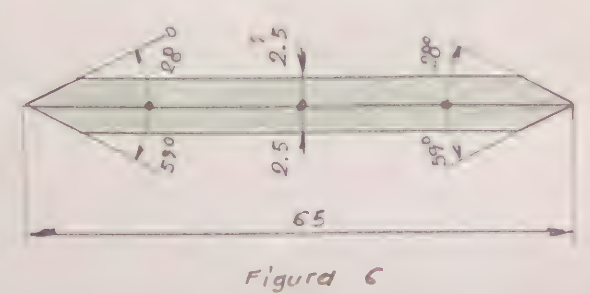


Figura 6

PIEZA Nº 6 60 unidades

Figura 6

C) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas, de arista "a_6", inscrito en el dodecaedro B).



Modelo M-5.8

C1) Radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro B) de arista "a'_{12}".

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a_{12}$" deducida en el ejercicio G.E. nº.....- Lámina 4. en la que a_{12} tiene el valor $a_{12} = a'_{12} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}$ (ver fórmula (2) de este ejercicio). Así pues, tendremos:

$$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2\times(5+\sqrt{5})\times(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2}{5}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{2\times(5+\sqrt{5})\times(15+3+2\sqrt{45})}{5\times 12^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\times(5+\sqrt{5})(18+6\sqrt{5})}{5\times 12^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\times 2\times 6}{5\times 12^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{5\times 12}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{5\times 12}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5\times 3}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\boxed{r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (4)$$

Por estar el exaedro C) inscrito en el dodecaedro B), serán iguales los respectivos radios de sus esferas circunscritas, por lo que se verificará:

$$\boxed{r_{ec}^{12} = r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (5)$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez

Abril 1981



		Modelo M - 5.8

c2) Arista "a_6" del exaedro C), siendo "r_{ec}^6" el radio de su esfera circunscrita

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$" obtenida en el ejercicio G.E. nº... Lámina 2, despejando en ella a_6.- Así pues tendremos

$$a_6 = r_{ec}^6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} r_{ec}^6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6$$

y sustituyendo en ella r_{ec}^6 por su valor $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20}$ (ver fórmula (5) de este ejercicio) tendremos

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{3})^2 \times (5+2\sqrt{5})}{3^2 \times 15}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{12 \times (5+2\sqrt{5})}{9 \times 15}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{4\,(5+2\sqrt{5})}{9 \times 15}}\, r_{ec}^{20} = \boxed{2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{45}}\, r_{ec}^{20}} \quad (6)$$

La fórmula (6) aplicada al caso estudiado, nos da el siguiente valor numérico:

$$\boxed{a_6} = 2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{45}}\, r_{ec}^{20} \cong 0{,}91\,75\,87\,94\,7\ldots \times 110 \cong \boxed{100{,}9 \text{ mm}}$$

Para la construcción del exaedro C) de caras vaciadas, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 7 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura nº 7 de la página siguiente:

UNE A4 210 x 297



		Modelo M- 5.8

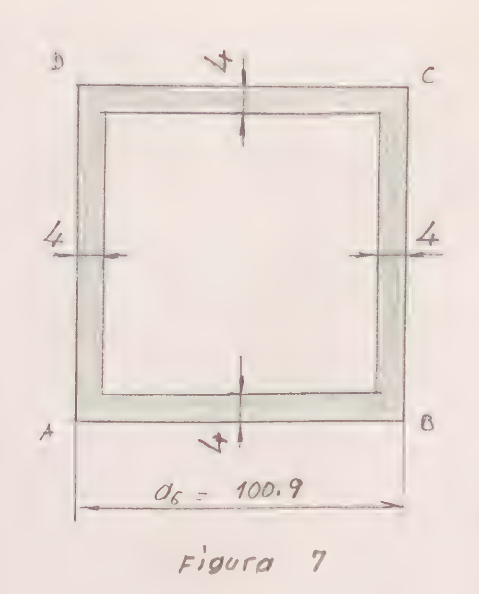


Figura 7

PIEZA Nº 7

6 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8.

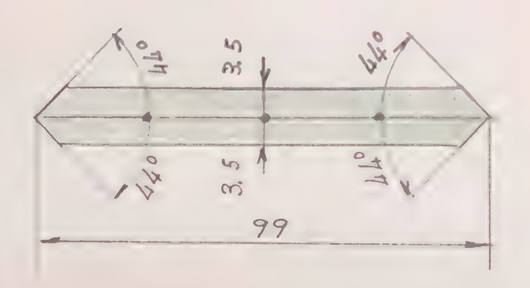


Figura 8

PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 8

D) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras vaciadas, de arista "a_4", inscrito en el exaedro C)

Este tetraedro está inscrito en el exaedro C) y también en el dodecaedro B, por lo que tendrán igual esfera circunscrita. Así pues, será:

$$r_{ec}^{4} = r_{ec}^{6} = r_{ec}^{12} \qquad (7)$$

D1) Arista "a_4" del tetraedro D)

UNE A4 210 x 297



Las seis aristas del tetraedro D) inscrito en el exaedro c), son diagonales de las caras de éste, y a su vez, diagonales de seis caras del dodecaedro B). Su longitud, será pues:

$d_4 = \sqrt{2}\ d_6$ y sustituyendo en ésta el valor de d_6 (ver fórmula (6) de este ejercicio), tendremos:

$$\boxed{d_4} = \sqrt{2}\ d_6 = \sqrt{2} \times 2 \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{45}}\ r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5}) \times (2\sqrt{2})^2}{45}}\ r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{8\ (5+2\sqrt{5})}{45}}\ r_{ec}^{20}} \qquad (8)$$

La fórmula (8), aplicada al caso estudiado, nos da el siguiente valor numérico:

$$\boxed{d_4} = \sqrt{\frac{8\ (5+2\sqrt{5})}{45}} \times 110 \cong 1,29\ 76\ 65\ 31\ 9... \times 110 \cong \boxed{142.7\ mm}$$

Para la construcción del tetraedro D) de caras vaciadas, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 9 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 9 de la página siguiente:



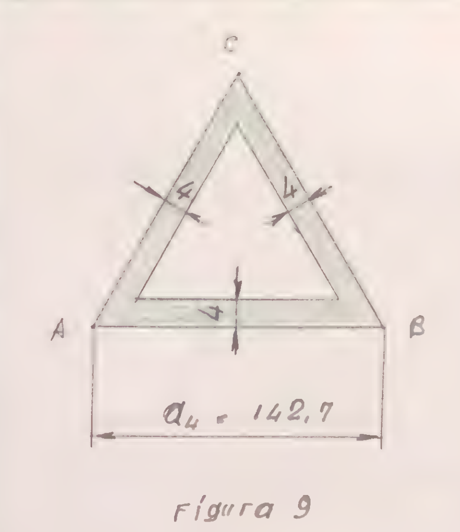


Figura 9

PIEZA Nº 9 4 (u)

Figura 9

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 10

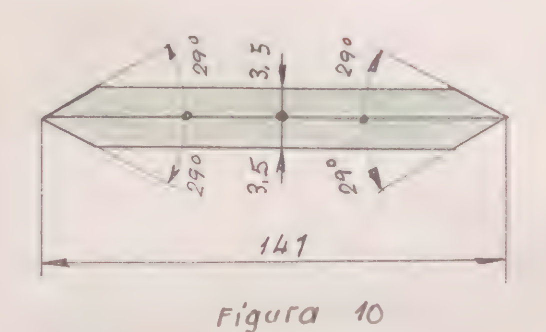


Figura 10

PIEZA Nº 10 6 (u)

Figura 10

E) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, de caras macizas, de arista "a_8", obtenido al unir los centros de las aristas del tetraedro D).

E1) Arista "a_8" del octaedro, en función de "r_{ec}^{20}"

De la construcción expresada anteriormente, se deduce que la arista "a_8" es la mitad de la "a_4"; es decir, tendremos

$$a_8 = \frac{1}{2} a_4$$



Modelo M- 5.8

y sustituyendo en esta fórmula el valor de a_4 (ver fórmula (8) de este ejercicio), será pues

$$\boxed{a_8} = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8(5+2\sqrt{5})}{45}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{8(5+2\sqrt{5})}{45 \times 2^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})}{45}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (9)$$

La fórmula (9), aplicada al caso estudiado, nos da el siguiente valor numérico:

$$\boxed{a_8} = \sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})}{45}} \times 110 \cong 0,64\,88\,32\,66\,0 \ldots \times 110 \cong \boxed{71,4 \text{ mm}}$$

Para la construcción del octaedro E) de caras macizas, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 11 — CARAS SUPERFICIALES — 8 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 11

C

A B

$a_8 = 71.4$

Figura 11

PIEZA Nº 11 — 8 (u)

Figura 11

Calvarez — Abril 1981

UNE A4 210 x 297



PIEZA Nº 12 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura nº 11, y se representan en la figura 12.

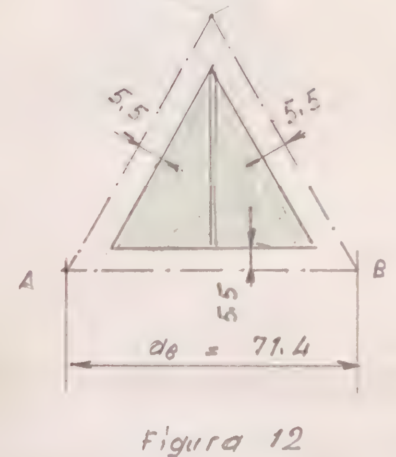


Figura 12

PIEZA Nº 12 8 (u)

Figura 12

PIEZA Nº 13 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 16 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 13; su colocación en la fig. 12.

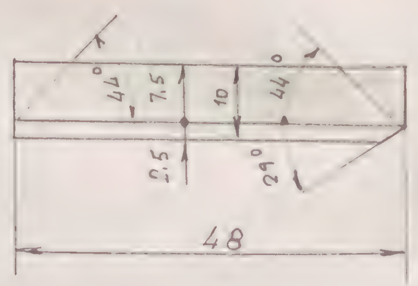


Figura 13

PIEZA Nº 13 16 (u)

Figura 13

PIEZA Nº 14 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 14

Figura 14

PIEZA Nº 14 12 (u)

Figura 14



		Modelo M - 5.8

PIEZA Nº 15 FORRO COLOREADO 8 unidades

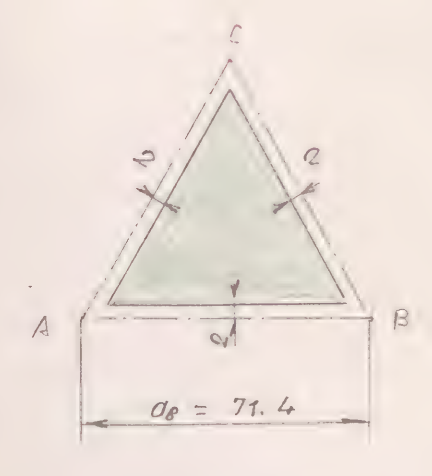


Figura 15

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 11, y se detallan en la figura 15

PIEZA Nº 15 8(a)

Figura 15

Como complemento de este estudio presentamos el siguiente CUADRO- RESUMEN

CUADRO- RESUMEN

POLIEDRO REGULAR	Radio r_{ec}^{n} de su esf. circ.		Arista a_n	
	Valor exacto (fórmula)	Valor numérico m m	Valor exacto (fórmula)	Valor numérico m m
A) ICOSAEDRO	r_{ec}^{20} Valor dato	110	$a_{20} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}$	115,7
B) DODECAEDRO	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20} = r_{ec}^{12}$	87,4	$a_{12} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}$	62.4
C) EXAEDRO	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20} = r_{ec}^{6}$	87,4	$a_6 = 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{45}}\, r_{ec}^{20}$	100,9
D) TETRAEDRO	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20} = r_{ec}^{4}$	87,4	$a_4 = \sqrt{\frac{8(5+2\sqrt{5})}{45}}\, r_{ec}^{20}$	142,7
E) OCTAEDRO	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{45}}\, r_{ec}^{20} = r_{ec}^{8}$	50.5	$a_8 = \sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})}{45}}\, r_{ec}^{20}$	71,4

UNE A4 210 x 297

Alvarez Abril 1971


Modelo M - 5.8
PATRONES

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-6.1

MODELO CORPÓREO DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE OTRO TETRAEDRO REGULAR CONVEXO (GENERADOR), SIENDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL TETRAEDRO GENERADO SE CONSTRUIRÁ CON SUS CARAS MACIZAS, Y EL GENERADOR CON SUS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$$r_{ec}'' = 76.1 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELO CORPÓREO	Modelo M- G.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, conjugado de otro tetraedro regular convexo (generador), siendo los vértices del primero, los centros de las caras del segundo.- El tetraedro generado, se construirá con sus caras macizas y el generador con sus caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

r_{ec}^{4} = Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$$r_{ec}^{4} = 76.1 \text{ mm}$$

En los ejercicios G. E. nos ----- Láminas 6 al 10, hemos estudiado la representación de los poliedros conjugados de los regulares convexos, en los que las aristas de los primeros son los segmentos rectilíneos obtenidos al unir los centros de dos caras contiguas de los poliedros regulares generadores.

Los poliedros conjugados son a su vez poliedros regulares convexos, y según se dedujo de dicho estudio, obtuvimos que: "El exaedro y octaedro regulares convexos son mutuamente conjugados (cada uno lo es del otro). Igualmente son mutuamente conjugados el dodecaedro e icosaedro regulares convexos.- El tetraedro regular es conjugado

UNE A4 210 x 297



de sí mismo.

También obtuvimos en los mencionados ejercicios G.E.... nº.... Láminas 6 al 10, los valores analíticos de las magnitudes de los poliedros conjugados, en función de las de los respectivos poliedros generadores, que nos servirán para la construcción de los modelos correspondientes.

Para la realización de este modelo (M-6.1), calcularemos previamente las siguientes magnitudes, en función del único dato del problema (radio r_{ec}^{4} de la esfera circunscrita al tetraedro generador).

1) Arista a_4 del tetraedro generador.

Se obtiene de la fórmula $r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4$, deducida en el ejercicio G.E. nº.... - Lám. 1; despejando en ella a_4. Tendremos pues:

$$\boxed{a_4} = r_{ec}^{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{4}{\sqrt{6}} \times r_{ec}^{4} = \frac{4\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{4}} \qquad (1)$$

---

2) Arista a'_4 del tetraedro conjugado

Se obtiene de la fórmula $a'_4 = \frac{1}{3} a_4$, deducida en el ejercicio G.E. nº... - Lámina 6.- Tendremos pues:

$$\boxed{a'_4} = \frac{1}{3} a_4 = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{9} r_{ec}^{4}} \qquad (2)$$



Modelo M - 6.1

3) Radio r_{i-3} de la circunferencia inscrita al triángulo equilátero de una cara del tetraedro generador.

Se obtiene de la fórmula $r_{i-3} = \frac{\sqrt{3}}{6} l_3$ del ejercicio G.P. 1.400-42.
Tendremos pues, haciendo $l_3 = a_4$

$$\boxed{r_{i-3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} l_3 = \frac{\sqrt{3}}{6} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 = \frac{2\sqrt{18}}{18} r_{ec}^4 =$$

$$= \frac{2 \times 3 \times \sqrt{2}}{18} r_{ec}^4 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^4} \qquad (3)$$

Las fórmulas (1), (2), y (3), aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes valores numéricos:

$$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^4 \cong 1{,}63\ 29\ 93\ 16\ 2... \times 76{,}1 \cong 124{,}3 \text{ mm} \qquad (1)$$

$$d'_4 = \frac{2\sqrt{6}}{9} \times r_{ec}^4 \cong 0{,}54\ 43\ 31\ 05\ 4... \times 76{,}1 \cong 41{,}4 \text{ mm} \qquad (2)$$

$$r_{i-3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times r_{ec}^4 \cong 0{,}47\ 14\ 04\ 52\ 1... \times 76{,}1 \cong 35{,}9 \text{ mm} \qquad (3)$$

La magnitud (3) nos permite efectuar la fijación de los vértices del tetraedro conjugado, mediante su unión material de los mismos a los puntos medios de las aristas del tetraedro generador.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980



Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) TETRAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

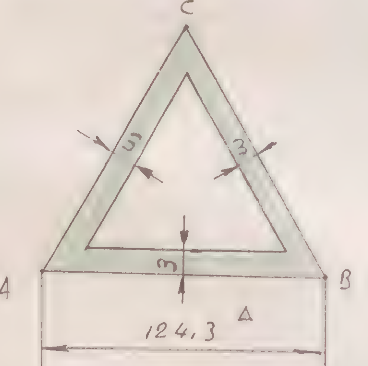


Figura 1

PIEZA Nº 1 4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

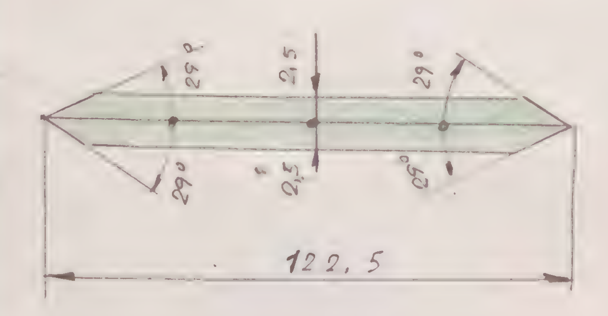


Figura 2

PIEZA Nº 2

6 (u)

Figura 2



Modelo M-6.1

B) TETRAEDRO CONJUGADO DE CARAS MACIZAS, CON PESTAÑAS DE FIJACIÓN DE SUS VÉRTICES A LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS ARISTAS DEL TETRAEDRO GENERADOR

PIEZA Nº 3 CARAS LATERALES CON PESTAÑAS

4 unidades

$r_{i-3} = 35.9$

Doblez

C

2.5

Pestaña

2.5

$r_{i-3} = 35.9$

A

B

$a'_b = 41.4$ Δ

Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 4 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL CARAS LATERALES

4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 3, y se detallan en la figura 4.

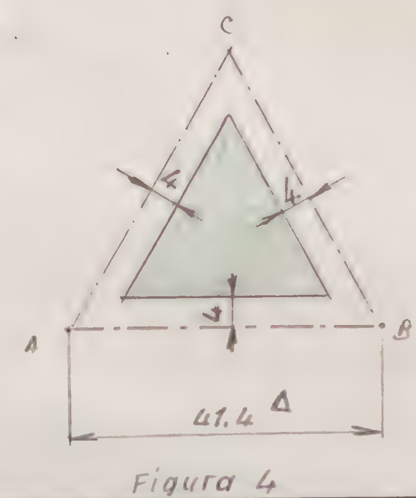


Figura 4

PIEZA Nº 4 4 (u)

Figura 4

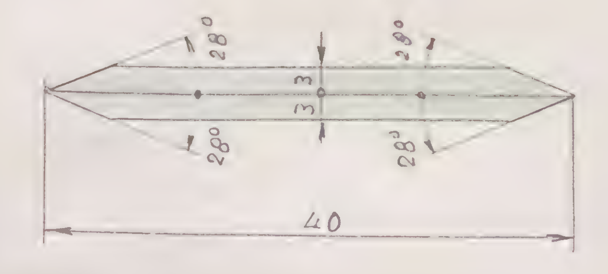
UNE A4 210 x 297

Calvarez Mayo 1980

Modelo M - 6.1

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 5

Figura 5

Talvarez Mayo 1980

EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_4" A LA DISTANCIA "$x = \frac{2}{3} a_4$", SIENDO "$a'_4 = \frac{1}{3} a_4$" LA LONGITUD DE LA ARISTA DEL TETRAEDRO GENERADO.- EL TETRAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL GENERADOR CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ m m.}$$

UNE A4 210 x 297

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS SOBRE POLIEDROS SEMI-REGULARES CONVEXOS, O "POLIEDROS ARQUIMEDIANOS"

CONTINUACIÓN DEL ESTUDIO PREVIO A LA CONSTRUCCIÓN DE LOS MISMOS.- PROCESO DE TRUNCADURA DE VÉRTICES EN LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS (LÁMINAS 1 A 5)

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 6.2

ENUNCIADO: Continuación del estudio previo a la construcción de los poliedros Arquimedianos. - Proceso de obtención por el procedimiento de TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos.

Prosiguiendo el estudio iniciado en el modelo M-39.5 y continuado en el M-39.7, en los que hemos analizado ya las seis posiciones sucesivas del plano secante π a las distancias:

1ª POSICIÓN $0 < x < \frac{1}{3} d_4$ (M-39.5) (1)

2ª POSICIÓN $x = \frac{1}{3} d_4$ (M-39.5) (2)

3ª POSICIÓN $\frac{1}{3} d_4 < x < \frac{1}{2} d_4$ (M-39.7) (3)

4ª POSICIÓN $x = \frac{1}{2} d_4$ (M-39.7) (4)

5ª POSICIÓN $\frac{1}{2} d_4 < x < \frac{3}{5} d_4$ (M-39.7) (5)

6ª POSICIÓN $x = \frac{3}{5} d_4$ (M-39.7) (6)

en cuyas posiciones se estudiaron principalmente las características geométricas del poliedro núcleo resultante de la

UNE A4 210 x 297



truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo a la distancia variable "x", estudiamos a continuación la POSICIÓN 7ª

3.7 7ª POSICIÓN

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO A LA DISTANCIA

$$\frac{3}{5} d_4 < x < \frac{2}{3} d_4 \qquad (7)$$

Partiendo de la posición 6ª (figura 9) del plano secante π_6, observemos que al alejarse dicho plano secante π_7 del vértice C, dentro de los límites (7), se verificará pues de forma análoga al estudio de la POSICIÓN 5ª (h8 del ESTUDIO PREVIO modelo M-39,7)

1º La truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia $\frac{3}{5} d_4 < x < \frac{2}{3} d_4$ (condición (7) de la 7ª POSICIÓN, da lugar a la formación, en las cuatro caras del tetraedro generador, de cuatro triángulos equiláteros TUV (figura 9), siendo su lado $l_3 = 2d_4 - 3x$ (fórmula 7), y coincidente su baricentro G con el de la cara ABC.

2º El mismo plano secante π_7, corta a los ángulos

UNE A4 210 x 297



		Modelo M- 6.2

sólidos del tetraedro generador, según triángulos equiláteros de lado "x" (figura 8) cuyos vértices quedan truncados a las distancias $\overline{ST} = \overline{UR} = \overline{SL} = 2x - a_4$ (fórmula 6), formándose en el plano secante Π_7, cuatro caras exagonales equiángulas T, U, M, N, P, Q cuyos lados menores $\overline{TU}$, $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ son los lados "l_3" de los triángulos TUV (fig. 9), formados en las caras del tetraedro generador.

Las cuatro caras reseñadas en el párrafo 1º, juntamente con las cuatro reseñadas en el 2º, forman un poliedro irregular convexo, nacido de la truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, de las siguientes características:

1) Cuatro caras triangulares regulares, de lado $l_3 = 2a_4 - 3x$, obtenidas sobre las caras del tetraedro generador

2) Cuatro caras exagonales equiángulas, cuyos lados menores, de longitud $l_3 = 2a_4 - 3x$ son coincidentes con los lados de las caras (1)

3) Número de vértices $V = \frac{1}{3} \times (4 \times 3 + 4 \times 6) = 12$ vértices

4) Número de aristas $A = \frac{1}{2} \times (4 \times 3 + 4 \times 6) = 18$ aristas

UNE A4 210 x 297

CAlvarez Mayo 1980



Modelo M- 6.2

Como resumen de lo expuesto en el párrafo 8.7, tendremos:

RESUMEN

El poliedro resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia

$$\frac{3}{5} d_4 < x < \frac{2}{3} d_4 \qquad 7^a \text{ POSICIÓN}$$

es un poliedro irregular convexo de las siguientes características:

1) Número de caras triangulares = 4

2) Número de caras exagonales equiángulas = 4

TOTAL caras = 8

3) Número de vértices V = 12

4) Número de aristas A = 18

MODELO DE ESTA SÉPTIMA POSICIÓN

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1980

3.8 8ª POSICIÓN

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA

$$x = \frac{2}{3} d_4 \qquad (8)$$

Partiendo de la posición 6ª (figura 9) del plano secante ($x = \frac{3}{5} d_4$), al alejarse dicho plano del vértice C dentro de los límites (7), estudiamos las características y forma del poliedro núcleo resultante de la truncadura de vértices del tetraedro regular convexo, en todas las posiciones intermedias que suponemos incluidas en la POSICION 7ª, sin llegar al límite superior de $x = \frac{2}{3} d_4$ (POSICIÓN 8ª)

Al moverse el plano secante desde la POSICION 6ª ($x = \frac{3}{5} d_4$), hacia la posición límite (8ª POSICIÓN) en la que $x = \frac{2}{3} d_4$, destacamos que las caras triangulares regulares formadas sobre las caras del tetraedro generador y de lados $l_3 = 2d_x - 3x$, estos lados van disminuyendo de longitud, conservándose coincidentes el baricentro G de dichos triángulos, con el de la cara ABC correspondiente.

Simultáneamente los lados menores de las caras exa-



		Modelo M-6.2

gonales equiángulas, también de longitud $l_3 = 2a_x - 3x$ van disminuyendo de longitud, y por lo tanto los lados $\overline{PN}$, $\overline{MU}$, $\overline{TQ}$ mayores de dichos exágonos (fig. 8) van aumentando de longitud

Por consiguiente existirá una posición tal del plano secante móvil en la que el lado l_3 sea mínimo (longitud cero), y en la que el exágono equiángulo P, N, M, U, T, Q, se transforma en un triángulo equilátero cuyos vértices sean los centros de los lados del triángulo sección de lado x.

El valor de la distancia x de esta truncadura se obtiene de la fórmula (7) $l_3 = 2a_4 - 3x$, haciendo en ella $l_3 = 0$, con lo que tendremos:

$0 = 2a_4 - 3x$ " $2a_4 = 3x$ y finalmente

$$\boxed{x = \frac{2}{3} a_4} \qquad (8)$$

estos cálculos justifican el límite superior (7) de la 7ª POSICIÓN.

Cuando la posición del plano secante sea la determinada por (8), las ocho caras que limitaban al poliedro núcleo resultante, se transforman en las cuatro siguientes:



a) Las cuatro caras triangulares regulares, situadas sobre las cuatro caras del tetraedro generador, se reducen a cuatro puntos, coincidentes con los centros G de dichas caras.

b) Las cuatro caras exagonales equiángulas, situadas en los planos secantes, se transforman en cuatro triángulos equiláteros que tienen por vértices los puntos medios del triángulo sección de lado "x". - El lado de dichos triángulos será pues

$$\boxed{l_3} = \frac{2}{3} a_4 : 2 = \boxed{\frac{1}{3} a_4}$$

Por consiguiente el poliedro núcleo resultante después de la truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{2}{3} a_4$, es otro tetraedro regular convexo conjugado con el primero (los vértices del tetraedro generado, son los centros de las caras del generador), y de arista $a'_4 = \frac{1}{3} a_4$.

Como resumen de lo expuesto en este párrafo 3.8, tendremos:

RESUMEN

UNE A4 210 x 297



El poliedro resultante de la truncadura de todos los vértices de un tetraedro regular convexo, a la distancia

$x = \frac{2}{3}\, a_4$	9ª POSICIÓN

es un tetraedro regular convexo, conjugado del tetraedro generador cuyos vértices son los centros de las caras de éste, y de arista $a' = \frac{1}{3}\, a_4$

De lo expuesto anteriormente podemos establecer la siguiente proposición; resultado de la truncadura en la 9ª POSICIÓN

El TETRAEDRO REGULAR CONVEXO puede ser engendrado por la truncadura de vértices de otro tetraedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{2}{3}\, a_4$, siendo la longitud a'_4 del tetraedro generado, la de $a' = \frac{1}{3}\, a_4$

3.9 " 9ª POSICIÓN

POLIEDRO NÚCLEO RESULTANTE DE LA TRUNCADURA DE TODOS LOS VÉRTICES DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, A LA DISTANCIA

UNE A4 210 x 297



$\frac{2}{3} d_4 < x \leq d_4$ 9ª POSICION (9)

Partiendo de la posición 8ª del plano secante $(x = \frac{2}{3} d_4)$, al dejarse dicho plano del vértice C dentro de los límites (8), las características y forma del poliedro núcleo resultante de la truncadura de vértices del tetraedro regular convexo, en todas las posiciones intermedias, definidas por la condición (9), es igual al de la posición (8), es decir, un tetraedro regular convexo, cuya arista va disminuyendo progresivamente hasta desaparecer en la posición límite $x = d_4$

3.10 CONCLUSIONES

Como final al estudio iniciado en el modelo M-39.5, continuado en el M-39.7 y terminado en este M-6.2 en el que hemos analizado todas las posiciones sucesivas del plano secante π en el proceso de TRUNCADURA DE VÉRTICES del tetraedro regular convexo, determinadas por la distancia "x" que fija dichas posiciones, que son las siguientes:

1ª POSICIÓN $0 < x < \frac{1}{3} d_4$ (M-39.5) (1)

2ª POSICIÓN $x = \frac{1}{3} d_4$ (M-39.5) (2)

UNE A4 210 x 297

[signature] Mayo 1980

		Modelo M - 6.2

3ª POSICIÓN $\frac{1}{3} d_4 < x < \frac{1}{2} d_4$ (M - 39.7) (3)

4ª POSICIÓN $x = \frac{1}{2} d_4$ (M - 39.7) (4)

5ª POSICIÓN $\frac{1}{2} d_4 < x < \frac{3}{5} d_4$ (M - 39.7) (5)

6ª POSICIÓN $x = \frac{3}{5} d_4$ (M - 39.7) (6)

7ª POSICIÓN $\frac{3}{5} d_4 < x < \frac{2}{3} d_4$ (M - 6.2) (7)

8ª POSICIÓN $x = \frac{2}{3} d_4$ (M - 6.2) (8)

9ª POSICIÓN $\frac{2}{3} d_4 < x \leqq d_4$. (M - 6.2) (9)

Los conceptos establecidos en el párrafo 3.8, y resumidos a su final, nos permite la construcción de este modelo M - 6.2, que a continuación estudiamos

---

UNE A4 210 x 297



ENUNCIADO EQUIVALENTE

MODELO CORPÓREO DEL TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE OTRO TETRAEDRO REGULAR CONVEXO (GENERADOR), CUANDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL TETRAEDRO GENERADO SE CONSTRUIRÁ CON SUS CARAS MACIZAS, Y EL GENERADOR, CON SUS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm.}$$



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-6.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, conjugado de otro tetraedro regular convexo (generador) siendo los vértices del primero, los centros de las caras del segundo. - El tetraedro generado, se construirá con sus caras macizas, y el generador con sus caras vaciadas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

r_{ec}^{4} = Radio de la esfera circunscrita al tetraedro generador:

$$r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm}$$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-6.1, de igual forma, pero de mayor tamaño, por ser $r_{ec}^{4} = 110 \text{ mm} > 76.1 \text{ mm}$.

Por otra parte, este modelo puede ser obtenido de forma diferente al enunciado dado, considerando el estudio realizado en el modelo M-39.7, referente a la obtención de diversos poliedros obtenidos por truncadura de vértices de un tetraedro regular convexo, uno de los cuales es idéntico al planteado en este ejercicio.

Este caso particular es el correspondiente a la posición 7ª (hoja 12 del modelo M-39.7) cuya proposición repetimos:

UNE A4 210 x 297



Modelo M- 6.2

"El tetraedro regular convexo, puede ser engendrado por la truncadura de vértices de otro tetraedro regular convexo, cuando el plano secante pase por tres puntos equidistantes de cada vértice, a la distancia $\frac{2}{3} a_4$, siendo la longitud de la arista a'_4 del tetraedro generado, la de $a'_4 = \frac{1}{3} a_4$."

El tetraedro engendrado tiene sus vértices en los centros de las caras triangulares regulares del tetraedro generador.

Teniendo presente las propiedades anteriores, podemos establecer un nuevo enunciado al problema planteado, bajo el nuevo enfoque del ejercicio actual, y que es el siguiente:

NUEVO ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del tetraedro regular convexo, conjugado de otro tetraedro regular convexo (generador) obtenido por truncadura de vértices del tetraedro generador, cuando el plano secante pase por tres puntos equidistantes de cada vértice, a la distancia $\frac{2}{3} a_4$, siendo la longitud de la arista a'_4 del tetraedro generado, la de $a'_4 = \frac{1}{3} a_4$

En esta nueva construcción, efectuaremos otra forma de fi-



jación del tetraedro generado en el interior del tetraedro generador.

Como el tetraedro conjugado generado, ha de realizarse con las caras macizas, y el tetraedro generador, con sus caras vaciadas, para poder situar en su posición correcta este último, construiremos sobre las cuatro caras triangulares regulares del mencionado tetraedro conjugado, otras tantas pirámides rectas regulares triangulares y auxiliares, de caras vaciadas, cuyos vértices servirán de apoyo a los cuatro del tetraedro generador.

Previamente efectuaremos los cálculos de longitudes siguientes:

1) Arista "a_4" tetraedro generador

Su valor es $$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 \qquad (1)$$

(ver fórmula (1) de ejercicio M - 6.1)

2) Arista "a'_4" del tetraedro conjugado

Su valor es $$a'_4 = \frac{2\sqrt{6}}{9} r_{ec}^4 \qquad (2)$$

(ver fórmula (2) del ejercicio M - 6.1)

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-6.2

3) Radio "r_{c-3}" de la circunferencia circunscrita al triángulo regular de una cara del tetraedro conjugado.

Se obtiene de la fórmula $r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3} l_3$ del ejercicio G.P. 1.400-42, haciendo en ella $l_3 = a'_4 = \frac{2\sqrt{6}}{9} r_{ec}^{4}$.

Su valor será pues:

$$\boxed{r_{c-3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} l_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{9} \times r_{ec}^{4} = \frac{2\sqrt{18}}{27} r_{ec}^{4} = \frac{2 \times 3\sqrt{2}}{27} r_{ec}^{4} =$$

$$= \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{9} r_{ec}^{4}} \qquad (3)$$

4) Radio "$r_{ei}^{4'}$" de la esfera inscrita al tetraedro conjugado.

Dicho radio se obtuvo en el ejercicio G.E... .- Lámina 1; en función de su arista. Su valor es $\frac{\sqrt{6}}{12} \times a'_4$, siendo $a'_4 = \frac{2\sqrt{6}}{9} r_{ec}^{4}$.- (Vea fórmula 2).. Así pues, tendremos:

$$\boxed{r_{ei}^{4'}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \times a'_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} \times \frac{2\sqrt{6}}{9} \times r_{ec}^{4} = \frac{6}{54} r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{1}{9} r_{ec}^{4}} \qquad (4)$$

5) Altura "h_3" de las pirámides auxiliares, rectas, triangulares, regulares.

Se obtiene como diferencia del radio r_{ec}^{4} de la esfera

UNE A4 210 x 297



Modelo M - G.2

circunscrita al tetraedro generador (dato del ejercicio), y del radio $r_{ei}^{4'}$ (ver fórmula (4)).- Así pues, tendremos:

$$\boxed{h_3} = r_{ec}^{4} - r_{ei}^{4'} = r_{ec}^{4} - \frac{1}{9} r_{ec}^{4} = \left(1 - \frac{1}{9}\right) r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{8}{9} r_{ec}^{4}} \qquad (5)$$

---

6) Arista "a_3" de las pirámides triangulares rectas, auxiliares

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo siendo sus catetos, uno la altura $h_3 = \frac{8}{9} r_{ec}^{4}$ (ver fórmula 5), y el otro cateto el radio $r_{c-3} = \frac{2\sqrt{2}}{9} r_{ec}^{4}$ (ver fórmula 3).- Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_3} = \sqrt{(h_3)^2 + (r_{c-3})^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{9} r_{ec}^{4}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} r_{ec}^{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)^2}\, r_{ec}^{4} =$$

$$= \sqrt{\frac{64}{9^2} + \frac{8}{9^2}}\, r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{72}}{9} r_{ec}^{4} = \frac{\sqrt{2^3 \times 3^2}}{9} r_{ec}^{4} = \frac{6\sqrt{2}}{9} r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3} r_{ec}^{4}}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} r_{ec}^{4}} \qquad (6)$$

Las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo, se deducen de las fórmulas (1), (2) y (6), para $r_{ec}^{4} = 110$. Sus valores, son:

UNE A4·210 x 297



		Modelo M-6.2

1) Arista del tetraedro generador: (fórmula 1)

$$\boxed{a_4} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^{4} \simeq 1.63\ 29\ 93\ 15\ 2\ldots \times 110 \cong \boxed{179.6\ mm}$$

2) Arista del tetraedro conjugado: (fórmula 2)

$$\boxed{a'_4} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \times r_{ec}^{4} \simeq 0,54\ 43\ 31\ 05\ 4\ldots \times 110 \cong \boxed{59.9\ mm}$$

3) Arista de las pirámides triangulares auxiliares: (fórmula 6)

$$\boxed{a_3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times r_{ec}^{4} = 0,94\ 28\ 09\ 04\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{103.7\ mm}$$

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) TETRAEDO REGULAR CONVEXO, GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-1.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades,

UNE A4 210 x 297

Calvare Mayo 1980



Modelo M- 6.2

Igual a la pieza nº 2 del modelo M - 1.102

B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO CONJUGADO, DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS LATERALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

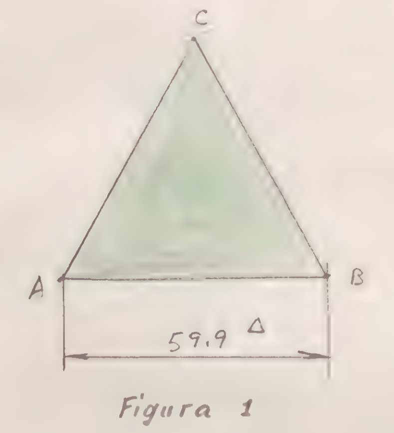


Figura 1

PIEZA Nº 3 4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2

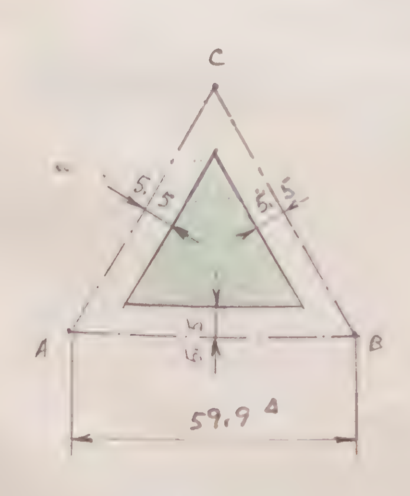


Figura 2

PIEZA Nº 4 4 (u)

Figura 2

Álvarez Mayo 1980



PIEZA Nº5 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 3

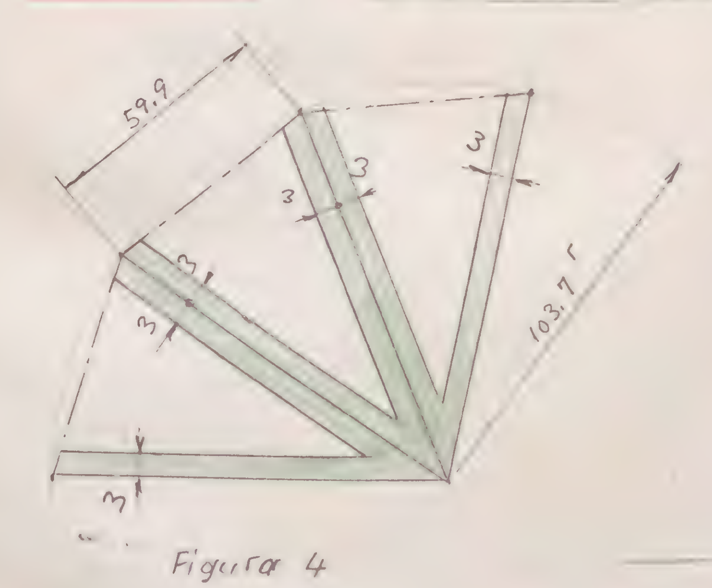
28° 28° 28° 28° 4.4

58

Figura 3

c) PIRÁMIDES AUXILIARES, REGULARES, TRIANGULARES, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº6 DESARROLLO LATERAL 4 unidades



PIEZA Nº 6

4 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

Modelo M-6.2

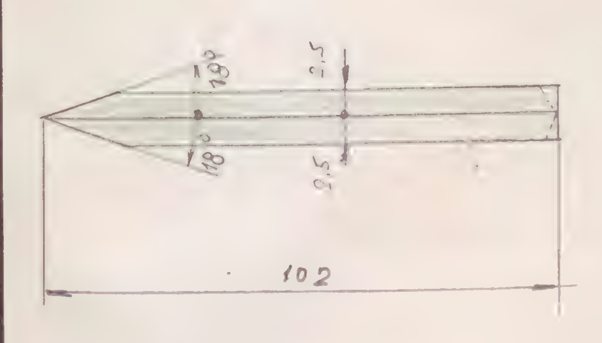


Figura 5

PIEZA Nº 7

12 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 FORRO COLOCADO EN CARAS LATERALES

TETRAEDRO CONJUGADO 4 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 6

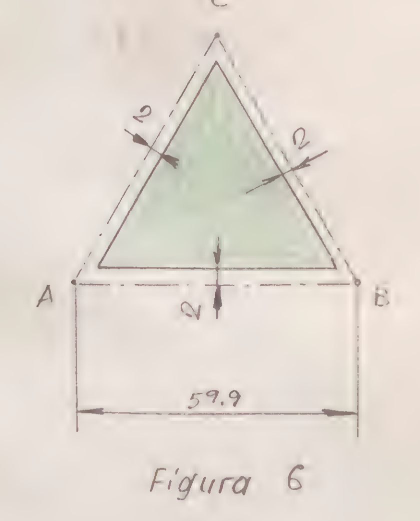


Figura 6

PIEZA Nº 8

4 (u)

Figura 6

UNE A4 210 x 297

Calvarez Mayo 1980

MODELO M-6.2 PATRONES



EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DE LA "SERIE DE TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS" P_4^1; P_4^2; P_4^3; P_4^4; .... P_4^n ($n = 1, 2, 3, 4$ ....) CONJUGADOS DE UN TETRAEDRO REGULAR CONVEXO P_4, EN LOS CUALES LOS VÉRTICES DE LOS TETRAEDROS ENGENDRADOS P_4^1; P_4^2; P_4^3; P_4^4;.... P_4^n ($n = 1, 2, 3, 4$....), SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL ANTERIOR.

Radio de la esfera circunscrita al poliedro convexo generador P_4 (tetraedro regular):

$$r_{ec}^4 = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 6.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la "Serie de tetraedros regulares convexos" P_4^1; P_4^2; P_4^3; P_4^4 ... P_4^n ($n = 1, 2, 3, 4$ ....) conjugados de un tetraedro regular convexo "P_4", en los cuales los vértices de los tetraedros engendrados P_4^1; P_4^2; P_4^3; ..... P_4 ($n = 1, 2, 3, 4$ ...) son los centros de las caras del anterior.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

r_{ec}^4 = Radio de la esfera circunscrita al poliedro convexo generador P_4 (tetraedro regular)

$$r_{ec}^4 = 110 \text{ m.m}$$

1) GENERALIDADES

Si consideramos un poliedro regular convexo P_4 (tetraedro regular) de arista cualquiera a_4, y unimos los centros "G" de cada cara, con los centros de las caras contiguas que concurren en cada una de sus aristas, se nos formará un nuevo tetraedro regular convexo P_4^1 cuyos vértices estarán en los mencionados centros "G" del tetraedro generador P_4. El tetraedro engendrado P_4^1, será pues "conjugado" del

UNE A4 210 x 297

Mayo 1981



tetraedro generador P_4.

Si repetimos la operación anterior, uniendo los centros de las caras del tetraedro P_4^1 obtendremos otro nuevo tetraedro regular convexo P_4^2, cuyos vértices estarán situados a su vez en los centros G' de las caras del P_4^1; y así sucesivamente pueden obtenerse los tetraedros P_4^3, P_4^4 .... P_4^n $(n = 1, 2, 3, 4....)$.

Todos estos poliedros convexos (tetraedros regulares, P_4^1, P_4^2, ... P_4^{n-1}; junto con el primitivo P_4, forman una serie de tetraedros

$$S = P_4 \; ; \; P_4^1 \; ; \; P_4^2 \; ; \; P_4^3 \; ; \; .... \; P_4^{n-1} \qquad (1)$$

todos conjugados entre sí y cuyas aristas sucesivas van disminuyendo progresivamente. Los poliedros de la serie S, son pues semejantes.

2) RELACIONES MÉTRICAS

En la construcción del modelo M-6.2, hemos obtenido las siguientes fórmulas:

1) Arista "a_4" del tetraedro generador P_4 (ver fórmula 1) de dicho ejercicio):

$$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \, r_{ec}^4 \qquad (2)$$

y también:



a) Arista "a'_4" del tetraedro conjugado (ver fórmula e) del ejercicio M-6.2)

$$\boxed{a'_4 = \frac{2\sqrt{6}}{9}\, r_{ec}^{4}} \qquad (3)$$

La relación entre las magnitudes lineales de (3) y (2) será pues:

$$\boxed{a'_4 : a_4} = \frac{2\sqrt{6}}{9}\, r_{ec}^{4} : \frac{2\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{4} = \boxed{\frac{1}{3}} \qquad (4)$$

De (4) se deduce que:

Como los tetraedros regulares de la Serie S (fórm. 1) son todos semejantes entre sí, sus respectivas magnitudes lineales, superficiales o cúbicas (excepto las angulares), serán proporcionales, por lo que sus correspondientes valores particulares, formarán una progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$ en las magnitudes lineales; $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right.$ en las superficiales y $\left.\left(\frac{1}{3}\right)^3\right.$ en las cúbicas$\left.\right]$. Las magnitudes angulares son iguales para todos los componentes de dicha serie S

Esta propiedad nos permite calcular rápidamente las magnitudes de cualquier tetraedro P_4^n de la serie (1) en función de las del tetraedro generador P_n, supuesto conocidas, ya que cada una de ellas y sus homólogas forman una serie geométrica indefinida



$$a, \; aV; \; aV^2; \; aV^3; \dots \; aV^{n-1} \qquad (3)$$

que consta de "n" términos, siendo "a" su primer término; "V" su razón; y $z = a V^{n-1}$ el último término.

Esta razón V será igual a $\frac{1}{3}$ en el cálculo de magnitudes lineales; de $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ en el de las superficiales y de $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ en las cúbicas.

Como la rasón "V" en estas tres series es menor que la unidad $\left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \frac{1}{3} < 1$ todas ellas son decrecientes, por lo que la suma total de sus "n" términos se aproxima cada vez más a un valor determinado, llamado "límite". Este valor límite, será el que dé la fórmula general "$\Sigma = a \frac{V^n - 1}{V - 1}$" para el cálculo de la suma de términos de una progresión geométrica cuando $n \longrightarrow \infty$. Y teniendo en cuenta que la potencia infinita de un número menor que la unidad, es cero, podemos deducir que

$$\boxed{\Sigma} = \lim_{n \to \infty} a \frac{V^n - 1}{V - 1} = \frac{a \times (0 - 1)}{V - 1} = \frac{-a}{V - 1} = \boxed{\frac{a}{1 - V}} \qquad (4)$$

---

3) CONSTRUCCION DEL MODELO PROPUESTO

La construcción de este modelo incluye tan sólo los tres primeros tetraedros regulares de la serie (1), que son los P_4; P_4^1 y P_4^2.



Los poliedros P_4 y P_4^1, los construiremos con sus caras vaciadas, y el P_4^2 con sus caras macizas. La colocación mutua de los poliedros P_4^1 y P_4^2 en el interior del poliedro generador P_4, la efectuaremos mediante pirámides auxiliares rectas, triangulares, cuyas bases son las caras del tetraedro interior correspondiente, de forma análoga a lo realizado en el modelo M-6.2.

Para la construcción de este modelo, cuyas piezas, dimensiones y cálculo de longitudes realizamos a continuación, son necesarias las siguientes piezas:

A) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR P_4, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

A 1) Arista "a_4" del tetraedro generador.

Su valor se deduce de la fórmula (1) obtenida en el ejercicio M-6.1.

$$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 \qquad (5)$$

y haciendo $r_{ec}^4 = 110$, tendremos

$$\boxed{a_4} = \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \times 110 \cong 1,63\,29\,93\,16\,2\ldots \times 110 \cong \boxed{179,6 \text{ mm}}$$

UNE A4 210 x 297

Modelo M-6.3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

C

4 4

A B

4

179.6

Figura 1

PIEZA Nº 1

4 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

29° 3.5 29°

29° 3.5 29°

178

Figura 2

PIEZA Nº 2 6 (u)

Figura 2

B) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO P'_4, CONJUGADO DEL P_4, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

B1). Arista "a'_4" del tetraedro P'_4

Como consecuencia de lo expuesto en el párrafo 1), será:

Tavares Mayo 1981



$a'_4 = \frac{1}{3}\ a_4$; en la que sustituiremos a_4 por su valor (ver fórmula 2), por lo que será:

$$\boxed{a'_4} = \frac{1}{3}\ a_4 = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}\ r_{ec}^4 = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{9}\ r_{ec}^4} \qquad (6)$$

y haciendo $r_{ec}^4 = 110$, tendremos:

$$\boxed{a'_4} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \times 110 \cong 0,54\ 43\ 31\ 05\ 4 \ldots \times 110 \cong \boxed{59,9\ \text{mm}}$$

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura 3

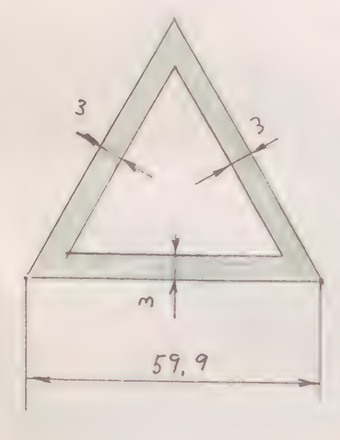


Figura 3

PIEZA Nº 3

4 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones, se detallan en la figura 4

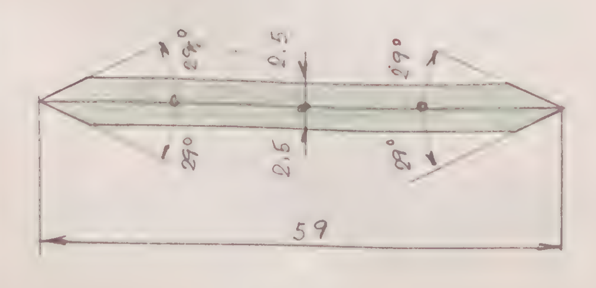


Figura 4

PIEZA Nº 4

6 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1981



B2 FIJACIÓN DEL TETRAEDRO CONJUGADO P_4^1, AL TETRAEDRO GENERADOR P_4

PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES REGULARES, RECTAS, TRIANGULARES, DE CARAS VACIADAS 4 unidades

Su forma y dimensiones son iguales a las de la pieza nº 6, figura 4, del modelo M-6.2, y se detallan en la figura 5

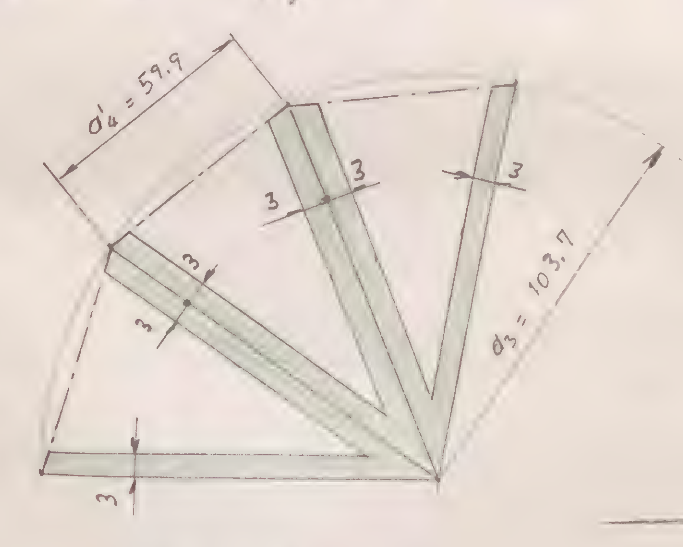


Figura 5

$$\boxed{d_3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, r_{ec}^{4} \cong$$

$$= 0.94\,28\,09\,04\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{103.7}\ \text{mm}$$

PIEZA Nº 5

4 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS DEL DESARROLLO ANTERIOR 12 unidades.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

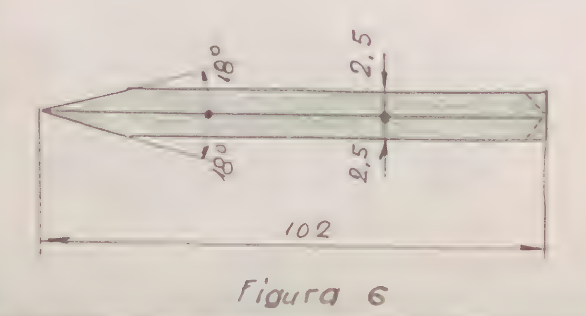


Figura 6

PIEZA Nº 6

12 (u)

Figura 6



		Modelo M-6.3

c) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO, P_4^2, CONJUGADO DEL P_4^1, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 7 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

c1) Arista a''_4 del Tetraedro P_4^2.

Como consecuencia de lo expuesto en el párrafo 1), será:

$$a''_4 = \frac{1}{3} a'_4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} a_4 = \frac{1}{9} a_4 = \frac{1}{9} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} r_{ec}^4 = \frac{2\sqrt{6}}{27} r_{ec}^4$$

y de aquí:

$$\boxed{a''_4} = \frac{2\sqrt{6}}{27} \times 110 \cong 0,18\,14\,43\,68\,5\ldots \times 110 \cong \boxed{20 \text{ mm}}$$

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

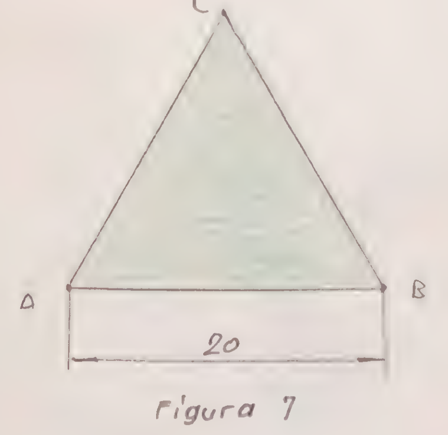


Figura 7

PIEZA Nº 7

4 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

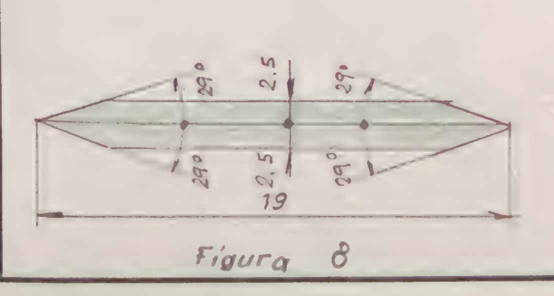


Figura 8

PIEZA Nº 8 6 (u)

Figura 8



PIEZA N° 9 FORRO COLOREADO 4 unidades

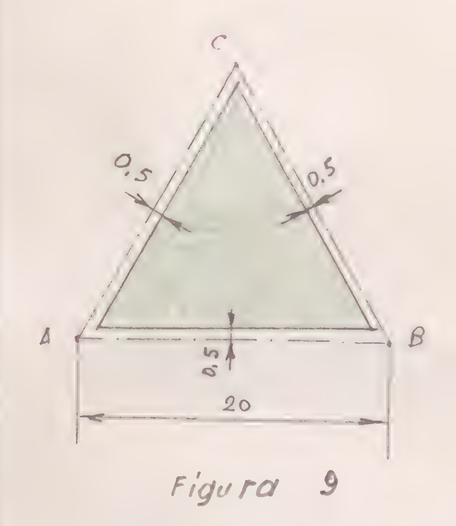


Figura 9

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 7, y se detallan en la figura 9

PIEZA N° 9 4 (4)

Figura 9

(2) FIJACIÓN DEL TETRAEDRO CONJUGADO P_4^2, AL TETRAEDRO P_4^1

PIEZA N° 10 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES REGULARES, RECTAS, TRIANGULARES, DE CARAS VACIADAS 4 unidades

c 3) Arista a_3' de las pirámides auxiliares

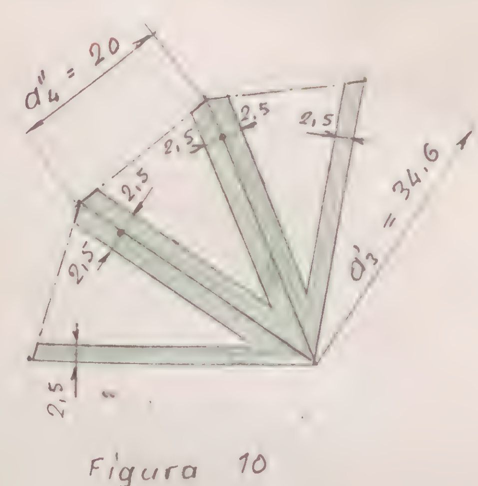


Figura 10

Como consecuencia de lo expuesto en el párrafo 1), será:

$$\boxed{a_3'} = \frac{1}{3} a_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} r_{ec}^4 =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{9} r_{ec}^4 \cong 0,31\,42\,69\,68\,0\ldots \times 110 \cong$$

$$= \boxed{34,6 \text{ mm}}$$

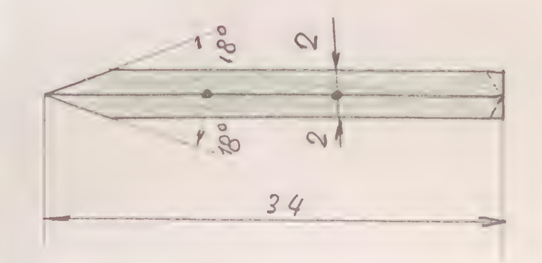
La forma y dimensiones de la pieza n° 10, se detallan en la figura 10

Modelo M- 6.3

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS DEL DESARROLLO ANTERIOR

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11



PIEZA Nº 11 12 (u)

Figura 11

Figura 11

UNE A4 210 x 297

Alvarez Mayo 1981



MODELO M - 6.3 Patrones

(3) 4

(3) 4

1 (M)

MODELO CORPÓREO DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, GENERADOR, SIENDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL EXAEDRO GENERADOR SERÁ DE CARAS VACIADAS, Y EL OCTAEDRO GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{ec}^{6} = 76.1 \text{ mm.}$$



dodecaedro e icosaedro regulares convexos. El tetraedro regular es conjugado de sí mismo.

También obtuvimos en los mencionados ejercicios G.E. nos ... .- Láminas 6 al 10, los valores analíticos de las magnitudes de los poliedros conjugados, en función de las de los respectivos poliedros generadores, cuyos valores nos servirán para la construcción de los modelos correspondientes.

Para la construcción de este modelo (M- 7.1), calcularemos previamente las siguientes magnitudes, en función del único dato del problema (radio r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al exaedro generador.

1) - Arista "a_6" del exaedro generador

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$", deducida en el ejercicio G.E. nº ---.- Lámina 2; despejando en ella a_6. Tendremos pues:

$$\boxed{a_6} = r_{ec}^{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6}} \qquad (1)$$

2).- Arista "a_8" del octaedro conjugado

Se obtiene de la fórmula $a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$, deducida en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 7. Tendremos pues:

Calvarés Julio 1980

UNE A4 210 x 297



Modelo M - 7.1

$$\boxed{a_8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, d_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^6 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^6} \qquad (2)$$

3) - Radio "r_{i-4}" de la circunferencia inscrita al cuadrado de una cara del exaedro generador.

Se obtiene de la fórmula "$r_{i-4} = \frac{1}{2}\, l_4$" del ejercicio G.P. 1.400-43. Tendremos pues, haciendo $l_4 = a_4$ y sustituyendo el valor de (1)

$$\boxed{r_{i-4}} = \frac{1}{2}\, d_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^6 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^6} \qquad (3)$$

Las fórmulas (1), (2) y (3), aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes valores numéricos:

$$\boxed{d_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^6 \cong 1.15\,47\,00\,53\,9... \times 76.1 \cong \boxed{87.9 \text{ mm}} \qquad (1)$$

$$\boxed{a_8} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^6 \cong 0.81\,64\,96\,58\,1... \times 76.1 \cong \boxed{62.1 \text{ mm}} \qquad (2)$$

$$\boxed{r_{i-4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^6 \cong 0.57\,73\,50\,26\,9... \times 76.1 \cong \boxed{43.9 \text{ mm}} \qquad (3)$$

La magnitud (3) nos permite efectuar la fijación de los vertices del octaedro conjugado, mediante su unión material de los mismos a los puntos medios de las aristas del exaedro generador

UNE A4 210 x 297

[signature] Julio 1980



Modelo M- 7.1

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) EXAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

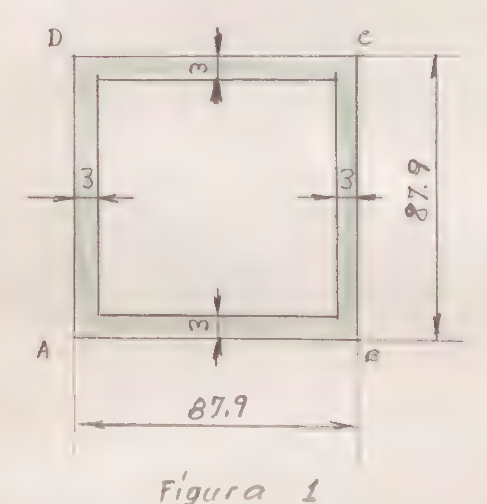


Figura 1

PIEZA Nº 1 6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

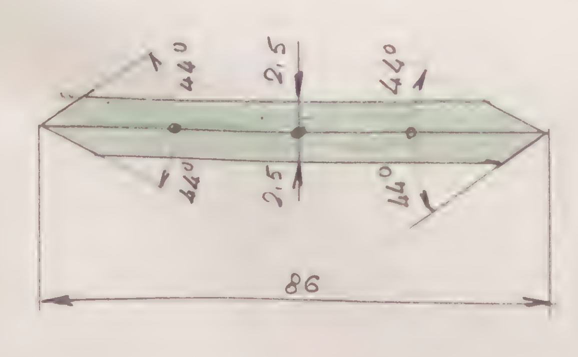


Figura 2

PIEZA Nº 2

12 (u)

Figura 2

UNE A4 210 x 297

Julio 1980



Modelo M-7.1

B) OCTAEDRO CONJUGADO DE CARAS MACIZAS, CON PESTAÑAS DE FIJACIÓN DE SUS VÉRTICES A LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS ARISTAS DEL EXAEDRO GENERADOR.

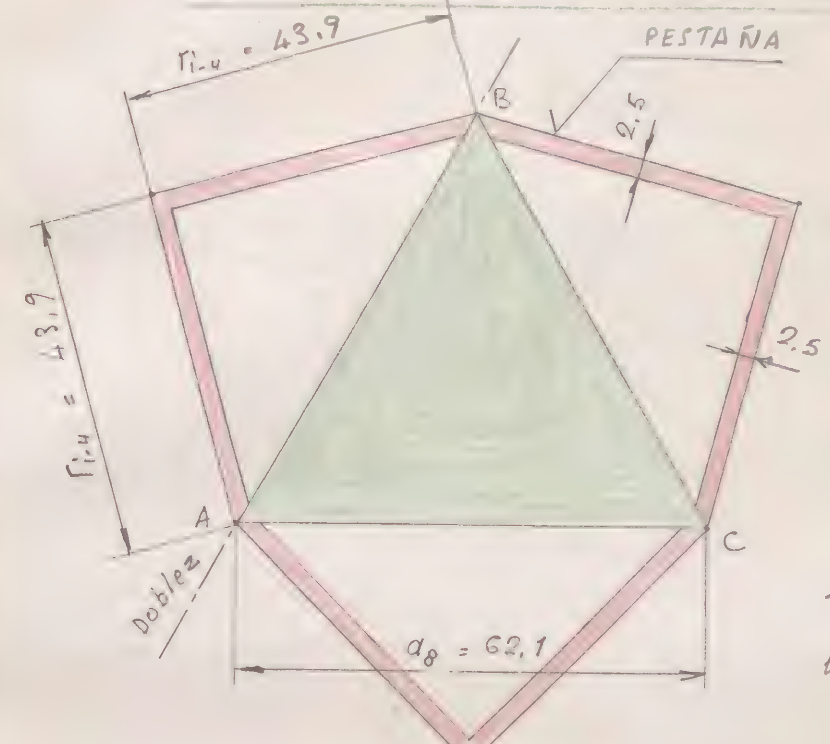


Figura 3

PIEZA Nº 3 8 (u)

CARAS LATERALES CON PESTAÑAS

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

PIEZA Nº 3 . 8 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL CARAS LATERALES

8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC, de la figura 3, y se detallan en la figura 4

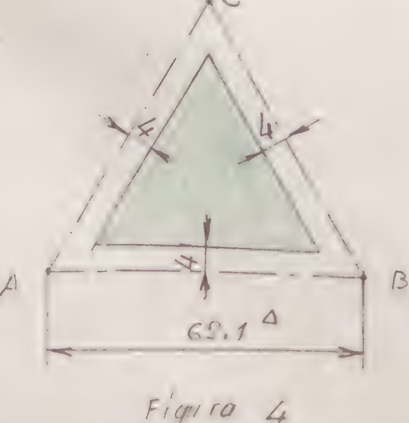


Figura 4

PIEZA Nº 4 8 (u)

Figura 4

Julio 1980



Modelo M- 7.1

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5

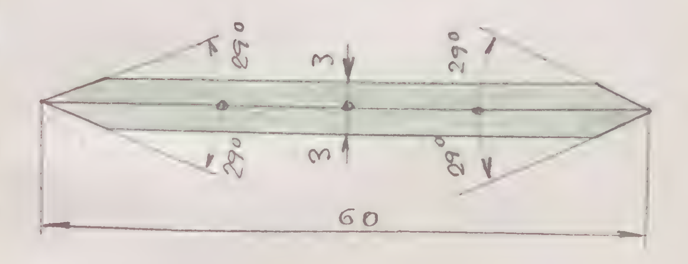


Figura 5

PIEZA Nº 5

12 (u)

Figura 5

UNE A4 210 x 297

Julio 1980



MODELO CORPÓREO DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_6", A LA DISTANCIA "$x = a_6$", SIENDO LA LONGITUD "a_8'" DEL OCTAEDRO GENERADO LA DE "$a_8' = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$".- EL OCTAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL EXAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{e_c}^{6} = 110 \text{ m m.}$$

ENUNCIADO EQUIVALENTE

MODELO CORPÓREO DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, GENERADOR, CUANDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL EXAEDRO GENERADOR SE CONSTRUIRÁ CON SUS CARAS VACIADAS, Y EL OCTAEDRO GENERADO, CON SUS CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$r = 110$ mm



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 7.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de un octaedro regular convexo, conjugado de un exaedro regular convexo generador, cuando los vértices del primero, son los centros de las caras del segundo.- El exaedro generador se construirá con sus caras vaciadas, y el octaedro generado, con sus caras macizas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

r_{ec}^{6} = Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm}$$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-7.1, de igual forma, pero de mayor tamaño, por ser $r_{ec}^{6} = 110$ mm > 76,1 mm.

Al mismo tiempo, este modelo puede ser obtenido de forma distinta al del enunciado dado, teniendo presente el estudio realizado en el modelo M-39.7, en el que se destacó la posibilidad de obtención de algunos poliedros arquimedianos, por el proceso de truncadura de vértices de los cinco poliedros regula-

res convexos. En dicho estudio, se analizó detalladamente los distintos poliedros convexos (regulares, arquimedianos o irregulares) que pueden obtenerse por el proceso de "truncadura de vértices del tetraedro regular convexo" en todas las posibles posiciones del plano secante. Dicho proceso puede aplicarse igualmente a los cuatro poliedros regulares convexos restantes (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), con lo que obtendríamos resultados análogos (pero con variaciones) de los que se obtuvieron para el tetraedro regular convexo.

Para el caso particular de este modelo, podemos enunciar la siguiente proposición:

"El octaedro regular convexo, puede ser engendrado por la truncadura de vértices de un exaedro regular convexo, cuyo plano secante pase por el centro "G" de las tres caras cuadradas correspondientes a cada uno de sus seis vértices, definido también por los tres puntos equidistantes de cada vértice, sobre las tres aristas concurrentes en él y a la distancia del mismo $x = a_6$, siendo a_6 la arista del exaedro generador. La longitud a'_8 de la arista del octaedro generado será $a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_6$"



Modelo M - 7.2

El octaedro engendrado tiene sus vértices en los centros "G." de las caras cuadradas del exaedro generador.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, podemos establecer un nuevo enunciado al problema planteado en este ejercicio, bajo el nuevo enfoque del mismo, y que es el siguiente:

NUEVO ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo, conjugado de un exaedro regular convexo (generador) obtenido por truncadura de vértices del exaedro generador, cuando el plano secante pase por tres puntos equidistantes de cada vértice y situados sobre las tres aristas concurrentes en el mismo, a la distancia a_6, siendo la longitud de la arista "a'_8" del octaedro generado, la de $a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$"

En esta nueva construcción, efectuaremos otra forma * de fijación al exaedro generador, del octaedro engendrado en su interior.

Como el octaedro generado ha de construirse con sus caras macizas, y el exaedro generador, con sus caras vaciadas, para poder situar en su posición co-

UNE A4 210 x 297

Alvarez Julio 1980



recta este último, construiremos sobre las ocho caras triangulares del mencionado octaedro conjugado, otras tantas pirámides rectas regulares triangulares auxiliares, de caras vaciadas, cuyos vértices servirán de apoyo a los ocho del exaedro generador.

Previamente efectuaremos los cálculos de longitudes siguientes:

1) - Arista "a_6" del exaedro generador

Su valor es: $$a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{6} \qquad (1)$$

(ver fórmula (1) del ejercicio M - 7.1

2) - Arista "a'_8" del octaedro conjugado

Su valor es: $$a'_8 = \frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{6} \qquad (2)$$

(ver fórmula (2) del ejercicio M - 7.1)

3) .- Radio "$r_{c.3}$" de la circunferencia circunscrita al triángulo regular de una cara del octaedro conjugado

Se obtiene de la fórmula $r_{c.3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_3$ del ejercicio

UNE A4 210 x 297

Julio 1980



Modelo M-7.2

G.P. 1.400-42, haciendo en ella $l_3 = a'_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{6}$.

Su valor será pues:

$$\boxed{r_{c\text{-}2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} l_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{18}}{9} r_{ec}^{6} = \frac{3\sqrt{2}}{9} r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^{6}} \quad (3)$$

---

4).- Radio "$r_{ei}^{8'}$" de la esfera inscrita al octaedro conjugado.

Dicho radio se obtuvo en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 3, en función de su arista. Su valor es $\frac{\sqrt{6}}{6} \times a'_8$, siendo $a'_8 = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{6}$ (ver fórmula (2)). Así pues, tendremos:

$$\boxed{r_{ei}^{8'}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \times a'_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^{6} = \frac{6}{18} \times r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{1}{3} r_{ec}^{6}} \quad (4)$$

---

5).- Altura "h_3" de las pirámides auxiliares, rectas, triangulares, regulares

Se obtiene como diferencia del radio r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al exaedro generador (dato del ejercicio), y del radio $r_{ei}^{8'}$ (fórmula 4).- Así pues, tendremos:

$$\boxed{h_3} = r_{ec}^{6} - r_{ei}^{8'} = r_{ec}^{6} - \frac{1}{3} r_{ec}^{6} = \boxed{\frac{2}{3} r_{ec}^{6}} \quad (5)$$

UNE A4 210 x 297

Calvario   Octubre 1980



Modelo M- 7.2

6).- Arista "a_3" de las pirámides triangulares rectas, auxiliares

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, siendo sus catetos: Uno, la altura $h_3 = \frac{2}{3} r_{ec}^6$ (ver fórmula 5), y el otro, el radio $r_{c-3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot r_{ec}^6$ (ver fórmula (3). Así pues tendremos:

$$a_3 = \sqrt{(h_3)^2 + (r_{c-3})^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} r_{ec}^6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^6\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{9}}\, r_{ec}^6 =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{9}}\, r_{ec}^6 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6} \qquad (6)$$

Las magnitudes necesarias para la construcción de este modelo, se deducen de las fórmulas (1), (2) y (6). Para $r_{ec}^6 = 110$ mm, sus valores son:

1) Arista a_6 del exaedro generador: (fórmula 1).

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 \simeq 1{,}15\,47\,00\,53\,9\ldots \times 110 \simeq \boxed{127 \text{ mm}}$$

2) Arista a'_8 del octaedro conjugado: (fórmula 2)

Tálvarez Julio 1980

UNE A4 210 x 297



$\boxed{a'_8} = \frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{oc}^{6} \cong 0{,}81\,64\,96\,58\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{89.8 \text{ mm}}$

3) Arista "a_3" de las pirámides triangulares auxiliares (fórmula 6)

$\boxed{a_3} = \frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{6} \cong 0{,}81\,64\,96\,58\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{89.8 \text{ mm}}$

Para la construcción de este modelo, son necesarias, las siguientes piezas:

A) EXAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-2.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-2.102.

B) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO, DE CARAS MACIZAS.



Modelo M- 7.2

PIEZA Nº 3 CARAS LATERALES 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

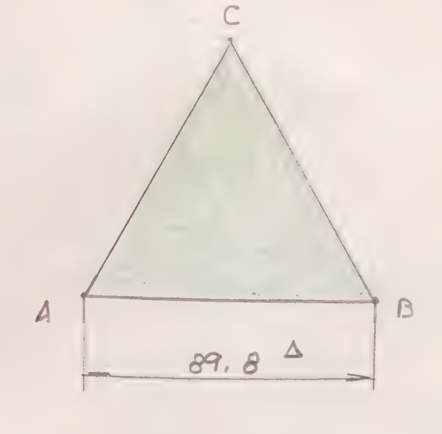


Figura 1

PIEZA Nº 3

8 (4)

Figura 1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 8 unidades

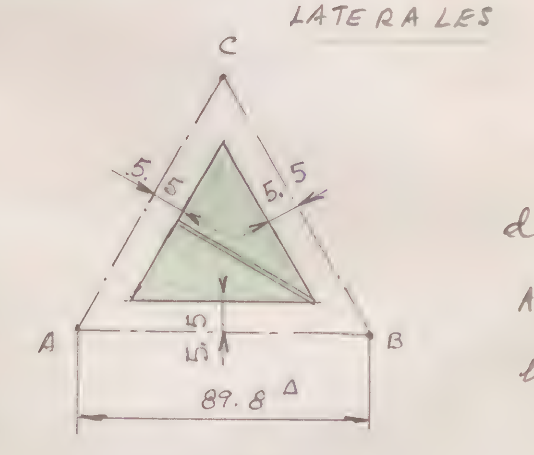


Figura 2

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2.

PIEZA Nº 4 8 (4)

Figura 2

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 16 unidades (simétricas dos a dos)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3; su colocación en la figura 3

UNE A4 210 x 297

Calvarez Julio 1980



Modelo M - 7.2

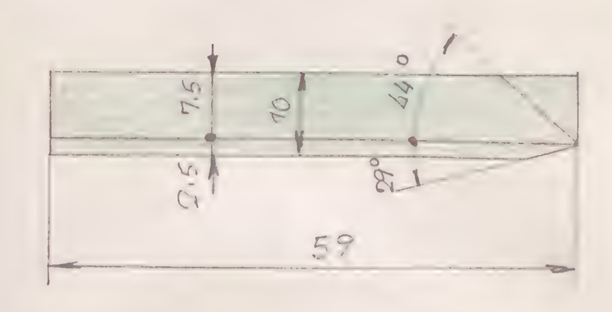


Figura 3

PIEZA Nº 5 16 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

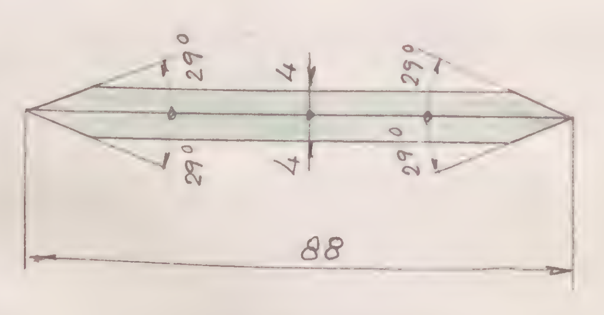


Figura 4

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 5

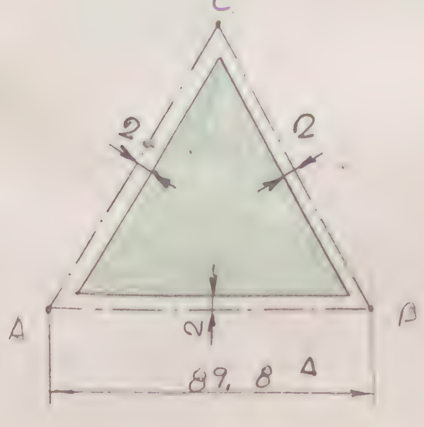


Figura 5

PIEZA Nº 7 8 (u)

Figura 5



c) PIRÁMIDES AUXILIARES, REGULARES, TRIANGULARES Y DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 8 DESARROLLO LATERAL 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

$a_i = 89.8$

3 3 3 3

89.8 r

3 3

$a_3 = 89.8$ $a_1 = 89.8$

179.6

Figura 6

PIEZA Nº 8

8 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

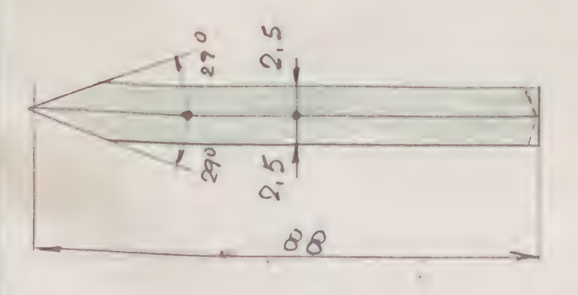


Figura 7

PIEZA Nº 9 24 (u)

Figura 7



MODELO M- 7.2

Patrones

Forro coloreado

REFUERZO

8(4)

EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DE LA "SERIE ALTERNATIVA DE OCTAEDROS Y EXAEDROS REGULARES CONVEXOS" P_8^1, P_6^2, P_8^3, P_6^4 ..... $P_{6-(8)}^n$, CONJUGADOS DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO P_{6-}, EN LOS CUALES LOS VÉRTICES DE LOS OCTAEDROS ENGENDRADOS P_8^1, P_8^3, P_8^5 ..... P_8^n ($n = 1, 3, 5, 7...$ impar), Y LOS VÉRTICES DE LOS EXAEDROS ENGENDRADOS, P_6^2, P_6^4, P_6^6 ... P_6^n ($n = 2, 4, 6, 8...$ par), SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL ANTERIOR.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro P_6 regular convexo generador:

$$r_{ec}^6 = 110 \text{ mm.}$$



rá pues "conjugado" del exaedro generador P_6.

Si repetimos la operación anterior, uniendo los centros de las caras del octaedro P_8^1, obtendremos un exaedro regular convexo P_6^2, de caras paralelas al generador P_6, y cuyos vértices estarán situados a su vez en los centros G' de las caras del octaedro P_8^1. Así sucesivamente se obtendrán alternadamente los exaedros P_6^2, P_6^4, P_6^6 ---- P_6^n (n = par) y también los octaedros P_8^3, P_8^5, P_8^7 --- P_8^n (n = impar) que forman en su conjunto la serie "S" de "n + 1" términos (n = 1, 2, 3, 4, 5----)

$$S = P_6 ;\ P_8^1 ;\ P_6^2 ;\ P_8^3 ;\ P_6^4 ;\ P_8^5 ;\ P_6^6 --\ P_{6(8)}^n \qquad (1)$$

Para valores pares de n "n = 2q" (q = 1, 2, 3, 4, 5----) se obtiene la serie parcial "S_1", formada exclusivamente por exaedros, de "q + 1" términos

$$S_1 = P_6 ;\ P_6^2 ;\ P_6^4 ;\ P_6^6 ;\ P_6^8 ----\ P_6^{2q} \qquad (2)$$

Para valores impares de n "n = 2q + 1" (q = 1, 2, 3, 4, 5...) se obtiene a su vez la nueva serie parcial "S_2", formada exclusivamente por octaedros, de "q + 1" términos:

$$S_2 = P_8^1 ;\ P_8^3 ;\ P_8^5 ;\ P_8^7 ;\ P_8^9 ; ----\ P_8^{2q+1} \qquad (3)$$

Las series de poliedros (1), (2) y (3) son decrecientes, y por lo tanto cualquier poliedro de ellas es menor que el anterior e inscrito en éste.



	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORMÓDEOS	Modelo M-7.3.

2) RELACIONES MÉTRICAS

Para la construcción de este modelo, utilizaremos las siguientes fórmulas deducidas de las ya obtenidas anteriormente en otros ejercicios.

2.1) Arista "a_6" del exaedro generador P_6 (ver fórmula 1) del ejercicio M-7.2)

$$a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \, r_{ec}^6 \qquad (4)$$

y también:

2.2) Arista "a_8^1" del octaedro conjugado "P_8^1" (ver fórmula 2) del ejercicio M-7.2)

$$a_8^1 = \frac{\sqrt{6}}{3} \, r_{ec}^6 \qquad (5)$$

Al unir los centros de las caras del octaedro P_8^1, obtenemos el exaedro P_6^2 (Serie (2))

2.3) Radio r_{ec}^8 de la esfera circunscrita al octaedro conjugado P_8^1 y arista a_8^1

Su valor se obtiene de la fórmula $r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_8$ deducida en el ejercicio G.E nº ... Lámina 3, haciendo en ella $a_8 = a_8^1$. Así pues tendremos:

$$r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_8^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{18}}{6} r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{2}}{2} r_{ec}^6 \qquad (6)$$

Octubre - 1981



	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-7.3

2.4) Arista "a_6^2" del exaedro P_6^2 conjugado del P_8^1.- Se obtiene de la fórmula (2) del ejercicio M-8.2 "$a_6^1 = \frac{2}{3} r_{ec}^8$", en la que $a_6^1 = a_6^2$ y $r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6$ (ver fórm. (6)).- Sustituyendo:

$$\boxed{a_6^2} = a_6^1 = \frac{2}{3} r_{ec}^8 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9} r_{ec}^6} \qquad (7)$$

Los exaedros regulares P_6 y P_6^2 (serie 2)), son semejantes, siendo su razón de semejanza $\frac{a_6^2}{a_6}$ la de sus aristas homólogas. Sustituyendo los valores de a_6 (4) y de a_6^2 (7), tendremos:

$$\boxed{\frac{a_6'}{a_6}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} r_{ec}^6 : \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6 = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}} \cong 0{,}33\ 33\ 33\ 333... < 1 \qquad (8)$$

Con las magnitudes a) fórmula (4); b) fórmula (5) y (c) fórmula (7) podemos construir este modelo M-7.3, que limitamos a los siguientes poliedros:

a) Exaedro generador "P_6" de caras vaciadas.

b) Octaedro "P_8^1" conjugado del exaedro "P_6", de caras vaciadas con sus correspondientes pirámides triangulares para fijación de los vértices del "P_6"

c) Exaedro "P_6^2" conjugado del octaedro "P_8^1", de caras macizas con sus correspondientes pirámides cuadradas para fijación de los vértices del "P_8^1".

UNE A4 210 x 297

[signature] Octubre - 1981



Supongamos ahora que el exaedro P_6^2 es a su vez, generador del octaedro P_8^3, (Serie 3)). (conjugado del P_6^2) y del exaedro P_6^4 (Serie (2)) (conjugado del P_8^3). El modelo formado por los poliedros P_6^2, P_8^3, y P_6^4 sería semejante al que estudiamos (Modelo M-7.4), aun cuando de menor tamaño, siendo la razón de semejanza la de $\frac{1}{3}$ (ver fórmula (8)), menor que la unidad.

Esta propiedad nos permite calcular fácilmente las dimensiones lineales de los poliedros P_6^2, P_6^3, P_6^4, bastando pues multiplicar por la razón de semejanza $\frac{1}{3} < 1$ las respectivas magnitudes lineales, homólogas de los poliedros P_6, P_8^1, P_6^2.

En la determinación de superficies se empleará la razón $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ y en la de volúmenes, la razón $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente deducimos que las magnitudes lineales de los poliedros de la Serie (2) forman una progresión geométrica indefinida cuyo primer término son las del exaedro generador P_6 y de razón $\frac{1}{3} < 1$.

Las lineales de la Serie (3) forman igualmente otra progresión geométrica indefinida cuyo primer término son las del octaedro P_8^1 conjugado del P_6 y deducidas independientemente de las de éste, cuya razón es también $\frac{1}{3} < 1$.

Las manitudes superficiales (áreas) o volumétricas de las Series (2) y (3) forman análogamente progresio-



3A) EXAEDRO GENERADOR "P_6", REGULAR, CONVEXO, DE CARAS VACIADAS.

Su arista "a_6" se deduce de la fórmula (4) de este ejercicio

$$\boxed{a_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 110 \cong 1.15\,47\,00\,53\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{127 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M - 2.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M - 2.102.

3B) OCTAEDRO REGULAR P_8^1 CONJUGADO DEL EXAEDRO P_6 DE CARAS VACIADAS

Su arista "a_8^1" se deduce de la fórmula (5) de este ejercicio

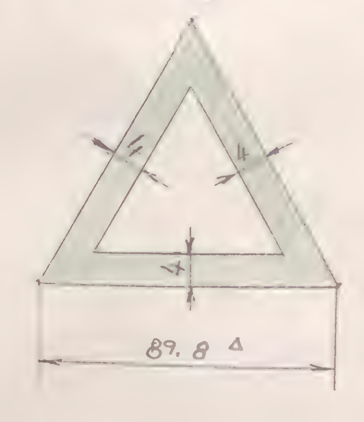
$$\boxed{a_8^1} = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 110 \cong 0,81\,64\,96\,58\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{89.8 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES 8 unidades



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 7.3

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1



PIEZA Nº 3

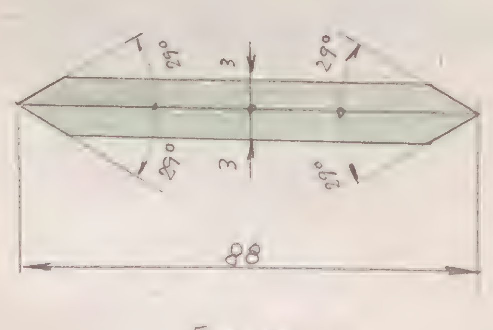
8 (U)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2



PIEZA Nº 4

12 (U)

Figura 2

Figura 2

3C) PIRÁMIDES AUXILIARES DE CARAS VACIADAS, RECTAS Y TRIANGULARES, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL EXADRO REGULAR "P_6" A LAS CARAS DEL OCTAEDRO "P_8^1"

La arista lateral "a_3" de estas pirámides auxiliares se obtiene de la fórmula $a_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6$ que es igual a la deducida en la fórmula (6) del ejercicio M - 7.2. La longitud de la base de dichas pirámides es la de la arista "a_8^1" del octaedro conjugado "P_8^1" (ver fórmula (5) de este ejercicio). Por

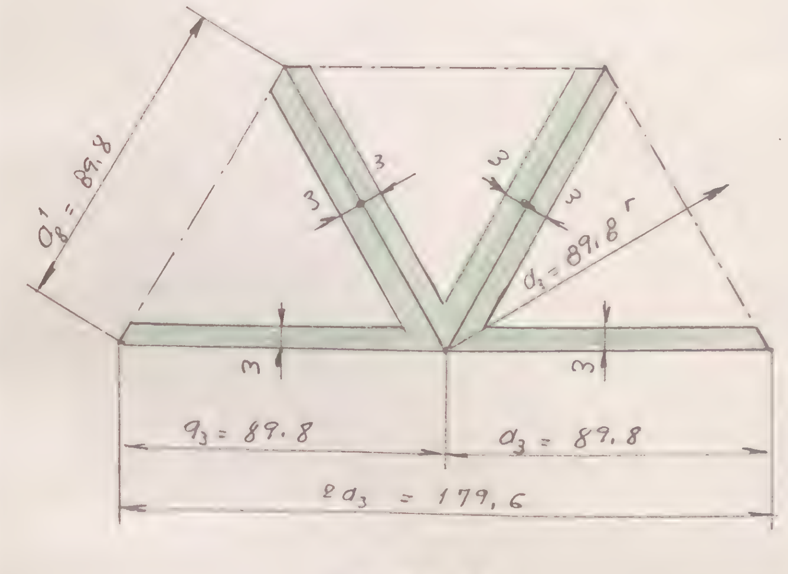


	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 7.3

consiguiente será $a_3 = a'_8 = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{oc}^{\varepsilon} \cong 89.8$ mm.

PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES 3C).

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3



PIEZA Nº 5

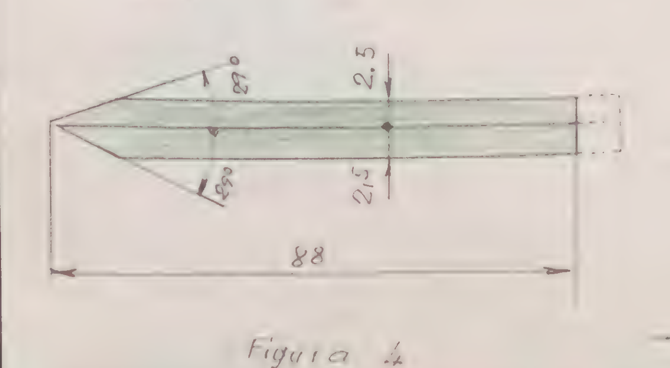
8 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



PIEZA Nº6

24 (u)

Figura 4

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Calvo Octubre 1981



	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-7.3

3D) EXAEDRO "P_6^2" CONJUGADO DEL OCTAEDRO "P_8^1", REGULAR, CONVEXO, DE CARAS MACIZAS.

Su arista "a_6^2" se deduce de la fórmula (7) de este ejercicio

$$\boxed{a_6^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\, r_{ec}^{6} = 0.38\,49\,00\,18\,0 \times 110 \cong \boxed{42.3 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 7 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

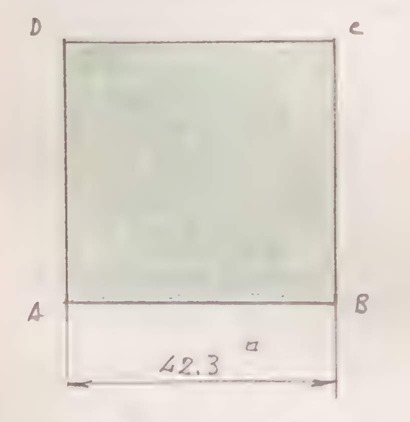


Figura 5

PIEZA Nº 7

6 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 5, y se detallan en la figura 6

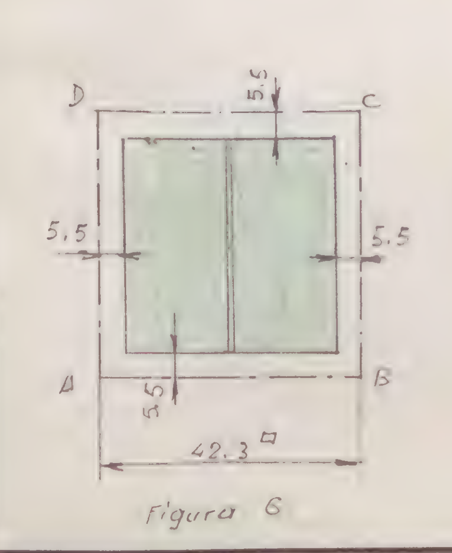


Figura 6

PIEZA Nº 8 6 (u)

Figura 6

Octubre 1981



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-7.3

PIEZA Nº 9 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 6.

PIEZA Nº 9 12 (u)

Figura 7

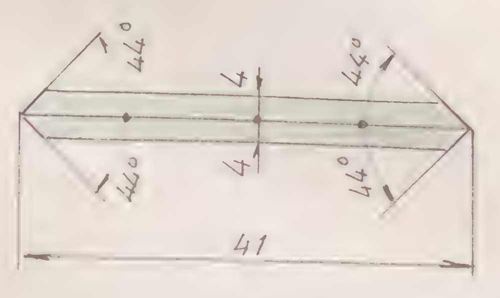


Figura 7

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 10 12 (u)

Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO 6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 5, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 11 6 (u)

Figura 11

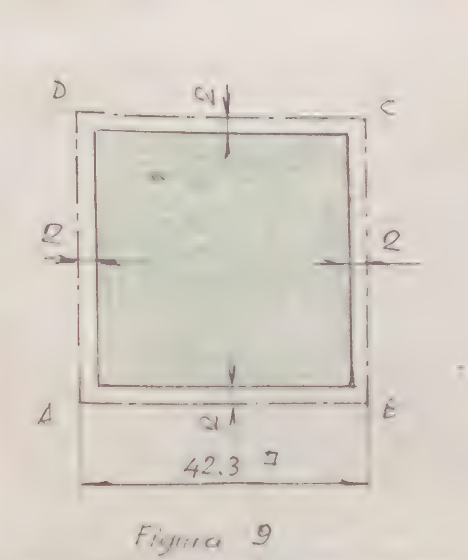


Figura 9

Talvarez Octubre 1981

UNE A4 210 x 297



3E) PIRÁMIDES AUXILIARES DE CARAS VACIADAS, RECTAS Y CUADRADAS, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL OCTAEDRO REGULAR "P_8^1" A LAS CARAS DEL EXAEDRO "P_6^2"

Para obtener el desarrollo lateral de estas pirámides auxiliares se precisa conocer las siguientes magnitudes lineales:

a) Longitud de la arista de su base cuadrada, y

b) Longitud de la arista lateral de la pirámide.

La longitud de la base, es igual a la de la arista a_6^2 del exaedro P_6^2 ya calculada en este ejercicio (ver fórmula 7)). Su valor numérico es:

$$\boxed{a_6^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\, r_{ec}^6 \cong 0,38\ 49\ 00\ 18\ 0 \ldots \times 110 \cong \boxed{42.3 \text{ mm}}$$

La longitud de la arista lateral "a_4" se obtiene considerando que uno de sus extremos es el vértice de una cara del exaedro P_6^2 y que por ser conjugado del P_8^1, es a su vez coincidente con el centro G de una cara del P_8^1 (fig. 10). El otro extremo C, es un vértice del octaedro P_8^1. Por consiguiente el segmento $\overline{CG} = a_4$ es igual al radio r_{cc}^3 del triángulo ABC de lado $l_3 = a_8^1$.

Así pues, tendremos:

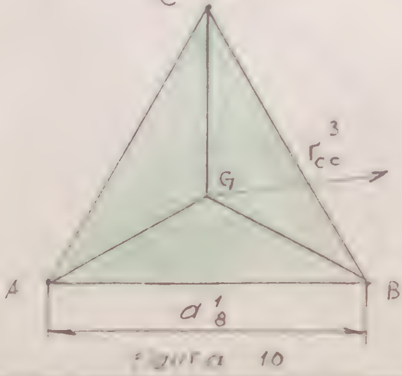


Figura 10

$a_4 = r_{cc}^3 = \frac{\sqrt{3}}{3} l_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times a_8^1$, y siendo $a_8^1 = \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6$ (ver fórmula (5) de este ejercicio), tendremos finalmente:

$$\boxed{a_4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{18}}{9} r_{ec}^6 = \frac{3\sqrt{2}}{9} r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^6 \cong$$

$$\cong 0.47\ 14\ 04\ 52\ 1... \times 110 \cong \boxed{51.9 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES, DE CARAS VACIADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

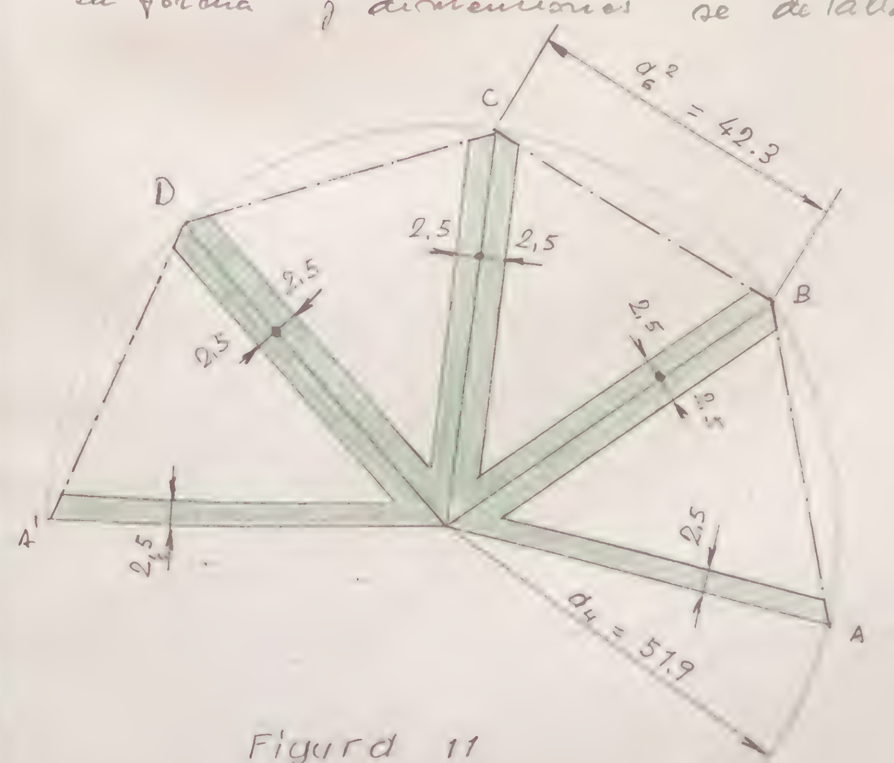


Figura 11

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA'} = 42.3$ mm

PIEZA Nº 12

6 (a)

Figura 11



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 7.3

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

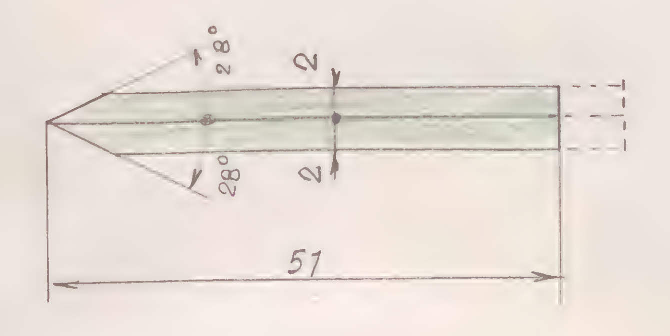


Figura 12

PIEZA Nº 13

24 (u)

Figura 12




MODELO M- 7.3
Patrones

MODELO CORPÓREO DEL EXAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, SIENDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL OCTAEDRO GENERADOR, SERÁ DE CARAS VACIADAS, Y EL EXAEDRO GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 76.1 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-8.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del exaedro regular convexo, conjugado de un octaedro regular convexo (generador), siendo los vértices del primero, los centros de las caras del segundo. El octaedro generador se construirá con sus caras vaciadas, y el exaedro generado, con sus caras macizas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

r_{ec}^{8} = Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 76,1 \text{ mm.}$$

En los ejercicios G.E. nº ---- Láminas 6 al 10, hemos estudiado la representación de los poliedros conjugados de los regulares convexos, en los que las aristas de los primeros son los segmentos rectilíneos obtenidos al unir los centros de dos caras contiguas de los poliedros regulares generadores.

Los poliedros conjugados son a su vez poliedros regulares convexos, y según se dedujo de dicho estudio, el exaedro y octaedro regulares convexos, son mutuamente conjugados; (cada uno lo es del otro). Igualmente son mutuamente conjugados el dodecaedro e icosaedro regulares convexos. El tetraedro regular es conjugado de si mismo.

También obtuvimos en los mencionados ejercicios G.E. nos ....- -Láminas 6 al 10, los valores analíticos de las magnitudes de los poliedros conjugados, en función de las de los respectivos poliedros generadores, cuyos valores nos servirán para la construcción de los modelos correspondientes.

Para la construcción de este modelo (M-8.1), calcularemos previamente las siguientes magnitudes, en función del único dato del problema (radio r_{ec}^{8} de la esfera circunscrita al octaedro generador)

1) Arista "a_8" del octaedro generador

Se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$", deducida en el ejercicio G.E. nº.. - Lámina 2, despejando en ella "a_8". Tendremos pues:

$$\boxed{a_8} = r_{ec}^{8} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} r_{ec}^{8} = \frac{2\sqrt{2}}{2} r_{ec}^{8} = \boxed{\sqrt{2}\ r_{ec}^{8}} \qquad (1)$$

---

2) Arista "a_6'" del exaedro conjugado

Se obtiene de la fórmula "$a_6' = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$", (ver fórmula (2) del ejercicio G.E. nº.. Lámina 8). Sustituyendo en ella "a_8" fórm. (1), será:

$$\boxed{a_6'} = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2}\ r_{ec}^{8} = \boxed{\frac{2}{3}\ r_{ec}^{8}} \qquad (2)$$

UNE A4 210 x 297

[illegible] Noviembre 1980



3) Radio r_{i-3} de la circunferencia inscrita al triángulo equilátero de una cara del octaedro generador

Se obtiene de la fórmula "$r_{i-3} = \frac{\sqrt{3}}{6} l_3$" del ejercicio (3).- G.P. 1.400-42. Tendremos pues, haciendo $l_3 = a_8$ y sustituyendo el valor de (1)

$$\boxed{r_{i-3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} l_3 = \frac{\sqrt{3}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{2}\, r_{ec}^8 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}} \quad (3)$$

Las fórmulas (1), (2) y (3) aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes valores numéricos:

$$\boxed{a_8} = \sqrt{2} \times r_{ec}^8 \cong 1,41421356 2... \times 76,1 \cong \boxed{107,6 \text{ mm}} \quad (1)$$

$$\boxed{a'_6} = \frac{2}{3} \times r_{ec}^8 \cong \frac{2}{3} \times 76,1 \cong \boxed{50,7 \text{ mm}} \quad (2)$$

$$\boxed{r_{i-3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \times r_{ec}^8 \cong 0,40824829 1--- \times 76,1 \cong \boxed{31,1 \text{ mm}} \quad (3)$$

La magnitud (3) nos permite efectuar la fijación de los vértices del exaedro conjugado, mediante su unión material de los mismos a los puntos medios de las aristas del octaedro generador.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:



A) OCTAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

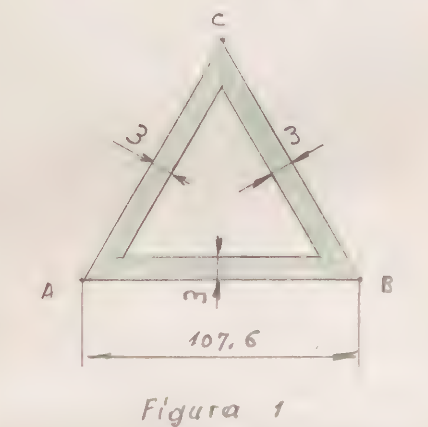


Figura 1

PIEZA Nº 1

8 (U)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

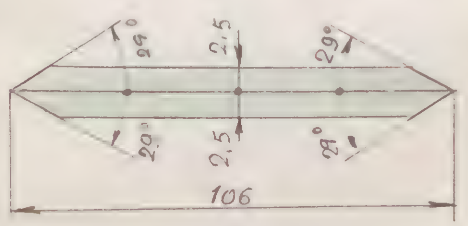


Figura 2

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

B) EXAEDRO CONJUGADO DE CARAS MACIZAS, CON PESTAÑAS DE FIJACIÓN DE SUS VÉRTICES A LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS ARISTAS DEL OCTAEDRO GENERADOR.

PIEZA Nº 3 CARAS LATERALES CON PESTAÑAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3



PESTAÑA

D C A B

$\overline{13}$ = 31,1

2,5

2,5

$\overline{13}$ = 31,1

a'_c = 50,7 □

Figura 3

PIEZA Nº 3

6 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS LATERALES

6 unidades

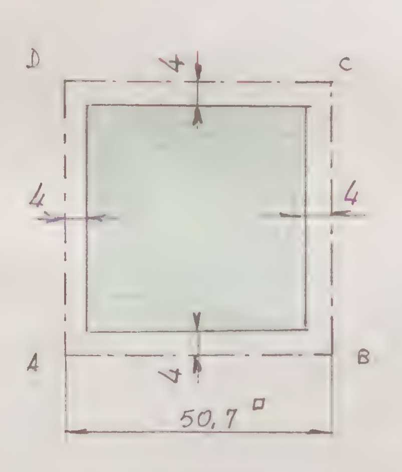


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 3, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 6 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS 12 unidades

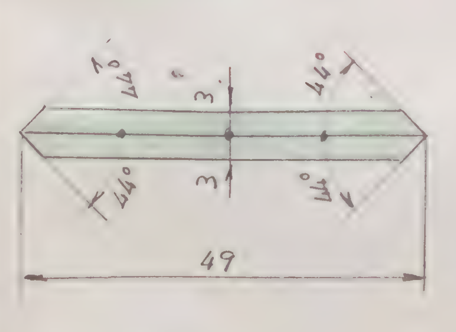


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

Falta pieza nº 6.- FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 6 (u)

Elwarez Noviembre 1980



MODELO CORPÓREO DEL EXAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_8", A LA DISTANCIA "$x = \frac{2}{3} a_8$", SIENDO LA LONGITUD "$a'_6 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$" DEL EXAEDRO GENERADO.– EL EXAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL OCTAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{e_c}^{8} = 110 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO EQUIVALENTE

MODELO CORPÓREO DEL EXAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO (GENERADOR), CUANDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.

EL OCTAEDRO GENERADOR SE CONSTRUIRÁ CON SUS CARAS VACIADAS, Y EL EXAEDRO GENERADO, CON SUS CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros. MODELOS CORPÓREOS	Modelo M- 8.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de un exaedro regular convexo, conjugado de un octaedro regular convexo (generador), cuando los vértices del primero son los centros de las caras del segundo.- El octaedro generador se construirá con sus caras vaciadas, y el exaedro generado, con sus caras macizas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

r_{ec}^{8} = Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-8.1, de igual forma, pero de mayor tamaño, por ser $r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm} > 76.1 \text{ mm}$.

También hacemos observar que este modelo puede ser generado de forma distinta al del enunciado dado, teniendo presente el estudio realizado en el modelo M-39.7, en el que se estudió la posibilidad de obtención de algunos poliedros Arquimedianos, por el proceso de truncadura de vértices de los cinco poliedros regulares convexos. En dicho estudio se analizó detalladamente los distintos poliedros y arquimedianos regulares

Alvarez Noviembre 1980



o irregulares) que pueden obtenerse por el mencionado proceso de "truncadura de vértices del tetraedro regular convexo" en todas las posibles posiciones del plano secante. Dicho proceso puede ser aplicado a los cuatro poliedros regulares convexos restantes (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), con análogos resultados de los que se obtuvieron en el tetraedro regular convexo. Por consiguiente, para el caso particular de este modelo, podemos enunciar directamente la siguiente proposición:

"El exaedro regular convexo, puede ser engendrado por la truncadura de vértices de un octaedro regular convexo, cuyo plano secante pase por el centro "G" de las cuatro caras triangulares regulares correspondientes a cada uno de sus vértices. Este plano secante puede situarse por cuatro puntos equidistantes de cada vértice, sobre las cuatro aristas concurrentes en él y a la distancia del mismo "$x = \frac{2}{3} a_8$", siendo a_8 la arista del octaedro generador. La longitud a_6' de la arista del exaedro generado, será "$a_6' = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$".

El exaedro engendrado tiene sus vértices en los centros "G" de las caras triangulares del exaedro generador.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, podemos establecer un nuevo enunciado al problema planteado en este ejercicio, equivalente al de este modelo M-8.2, bajo el nuevo enfoque del mismo, y que es el siguiente:



NUEVO ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del exaedro regular convexo, conjugado de un octaedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices del octaedro generador, a la distancia $x = \frac{2}{3} a_8$, siendo a_8 la arista del octaedro generador. La longitud de la arista a'_6 del exaedro generado será: $a'_6 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_8$.

En esta nueva construcción, efectuaremos otra forma diferente de la fijación al octaedro generador, del exaedro engendrado en su interior.

Como el exaedro generado ha de construirse con sus caras macizas, y el octaedro generador, con sus caras vaciadas, para poder situar en su posición correcta este último, construiremos sobre las seis caras cuadradas del mencionado exaedro conjugado, otras tantas pirámides rectas, regulares, de base cuadrada, auxiliares, cuyos vértices servirán de apoyo a los seis del octaedro generador.

Previamente efectuaremos los cálculos de las longitudes siguientes:

1) Arista "a_8" del octaedro generador

Su valor es:

$$a_8 = \sqrt{2} \; r_{ec}^{8} \qquad (1)$$

(Ver fórmula (1) del ejercicio M- 8.1



2) Arista a'_6 del exaedro conjugado.

Su valor es:

$$a'_6 = \frac{2}{3} r_{ec}^8 \qquad (2)$$

(Ver fórmula (2) del ejercicio M - 8.1)

---

3) Radio "r_{c-4}" de la circunferencia circunscrita al cuadrado de una cara del exaedro conjugado.

Se obtiene de la fórmula "$r_{c-4} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_4$" deducida en el ejercicio (1) G.P. 1.400-43, haciendo en ella $l_4 = a'_6 = \frac{2}{3} r_{ec}^8$

$$r_{c-4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3} r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^8 \qquad (3)$$

---

4) Radio "$r_{ei}^{6'}$" de la esfera inscrita al exaedro conjugado.

Su valor se obtiene de la fórmula $r_{ei}^6 = \frac{1}{2} a_6$ deducida en el ejercicio G.E. nº.... - Lámina 2, en función de su arista "a_6"; haciendo en ella $r_{ei}^6 = r_{ei}^{6'}$ y $a_6 = a'_6 = \frac{2}{3} r_{ec}^8$ (ver fórmula (2)), tendremos:

$$r_{ei}^{6'} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} r_{ec}^8 = \frac{1}{3} r_{ec}^8 \qquad (4)$$

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-8.2

5) Altura "h_4" de las pirámides auxiliares cuadradas, rectas, regulares.

Se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al octaedro generador (dato del ejercicio) y del radio "$r_{ei}^{6'}$" (fórmula 4). Así pues, será:

$$\boxed{h_4} = r_{ec}^{8} - r_{ei}^{6'} = r_{ec}^{8} - \frac{1}{3} r_{ec}^{8} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) r_{ec}^{8} = \boxed{\frac{2}{3} r_{ec}^{8}} \qquad (5)$$

6) Arista "a_4" de las pirámides cuadradas, rectas, regulares.

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son: Uno, la altura $h_4 = \frac{2}{3} r_{ec}^{8}$ (ver fórmula 5), y el otro, el radio $r_{c-4} = \frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^{8}$ (ver fórmula 3). Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_4} = \sqrt{(h_4)^2 + (r_{c-4})^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} r_{ec}^{8}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{9}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{6}{9}}\; r_{ec}^{8} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^{8}} \qquad .(6)$$

Las fórmulas (1), (2) y (6) aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes valores numéricos: ($r_{ec}^{8} = 110\,mm$)

$$\boxed{a_8} = \sqrt{2} \times r_{ec}^{8} \cong 1.41\,42\,13\,56\,2\ldots \times 110 \cong \boxed{155.6 \;mm} \qquad (1).$$

$$\boxed{a'_6} = \frac{2}{3} \times r_{ec}^{8} \cong 0.66\,66\,66\,66\,7\ldots \times 110 \cong \boxed{73.3 \;mm} \qquad (2)$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Noviembre 1980



		Modelo M-8.2

$$\boxed{a_4} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times r_{8i} \simeq 0.81\ 64\ 96\ 58\ 1\ldots \times 110 \simeq \boxed{89.8 \text{ mm}} \qquad (6)$$

La magnitud (6) nos permite efectuar la fijación de los vértices del exaedro conjugado, y situarlos en los centros de las caras del octaedro generador.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1. CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M- 3. 102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-3. 102

B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO, DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS LATERALES 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297



Modelo M - 8.2

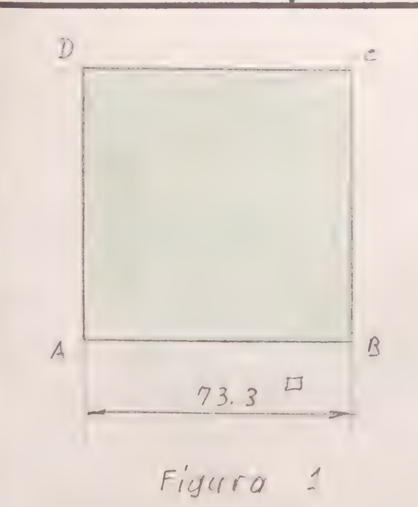


Figura 1

PIEZA Nº 3 6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 6 unidades

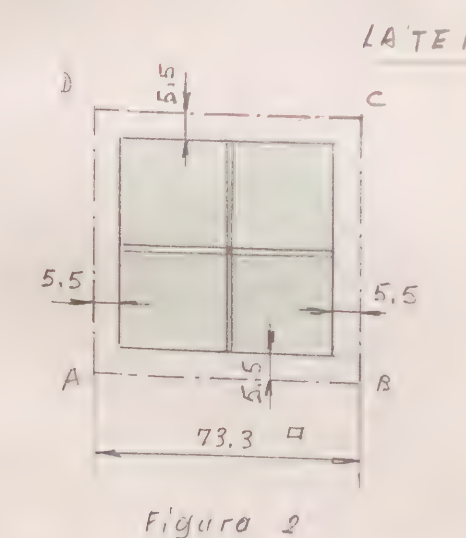


Figura 2

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura nº 1, y se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 6 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS LATERALES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3; su colocación en la figura 2

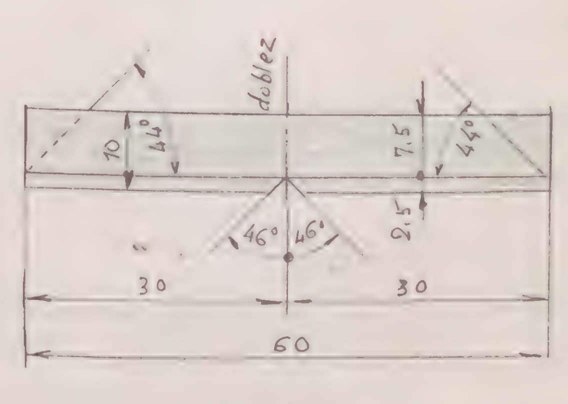


Figura 3

PIEZA Nº 5

6 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Tavares Noviembre 1980



PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

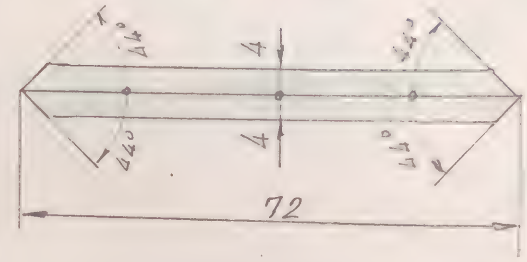


Figura 4

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 6 unidades

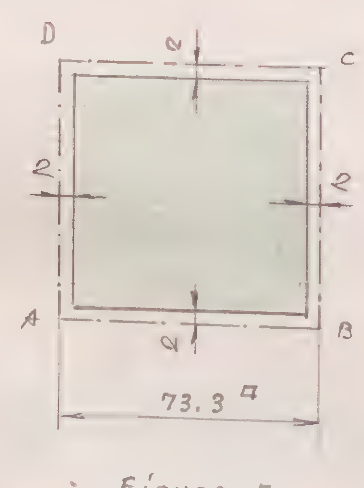


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 6 (u)

Figura 5

C) PIRÁMIDES AUXILIARES CUADRADAS, RECTAS, DE CARAS VACIADAS 6 unidades

PIEZA Nº 8 DESARROLLO LATERAL 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 6

(sigue en hoja 9)



Modelo M - 8.2

AB = BC = CD = DA' = 73.3 mm

PIEZA Nº 8

6 (u)

Figura 6

C D B 3 3 3 3 3 3 3 A' A 3 3 O_6 = 73.3 O_4 = 89.8

Figura 6

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

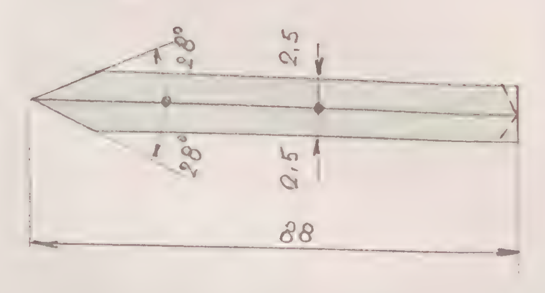


Figura 7

PIEZA Nº 9

32 (u)

Figura 7

UNE A4 210 x 297

Noviembre 1980

MODELO M- 8.2

PATRONES



EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DE LA "SERIE ALTERNATIVA DE EXAEDROS Y OCTAEDROS REGULARES CONVEXOS" P_6^1, P_8^2, P_6^3, P_8^4, P_6^5 ..... $P_{8-(6)}^n$, <u>CONJUGADOS DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO P_8</u>, EN LOS CUALES LOS VÉRTICES DE LOS EXAEDROS ENGENDRADOS P_6^1, P_6^3, P_6^5 ...... P_6^n (n = 1, 3, 5, 7.... impar), Y LOS VÉRTICES DE LOS OCTAEDROS ENGENDRADOS P_8^2, P_8^4, P_8^6, ... P_8^n (n = 2, 4, 6, 8, 10 .... n par), SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL ANTERIOR.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro P_8 regular convexo generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm.}$$

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-8.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la "Serie alternativa de exaedros y octaedros regulares convexos" P_6^1, P_8^2, P_6^3, P_8^4 ..... $P_{8-(6)}^n$", conjugados de un octaedro regular convexo P_{8+} en los cuales los vértices de los exaedros engendrados P_6^1, P_6^3, P_6^5... P_6^n ($n = 1, 3, 5...$ impar), y los vértices de los octaedros engendrados P_8^2, P_8^4, P_8^6... P_8^n ($n = 2, 4, 6, 8, ...$ par), son los centros de las caras del anterior.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

$r_{e_c}^8$ = Radio de la esfera circunscrita al octaedro P_8 regular convexo generador:

$$r_{e_c}^8 = 110 \text{ mm}$$

1) GENERALIDADES

Si consideramos un octaedro "P_8" regular convexo, de arista "a_8", y unimos los centros "G" de cada cara, con los centros de las dos contiguas que concurren en cada una de sus aristas, se nos formará un exaedro regular convexo P_6^1 cuyos vértices estarán en los mencionados centros "G" del octaedro generador P_8. El exaedro engendrado, se-

Modelo M - 8.3

rá pues "conjugado del octaedro generador P_8^1".

Si repetimos la operación anterior, uniendo los centros de las caras del exaedro P_6^1, obtendremos un octaedro regular convexo P_8^2, de caras paralelas al generador P_8, y cuyos vértices estarán situados a su vez en los centro G' de las caras del exaedro P_6^1. Así sucesivamente se obtendrán alternadamente los octaedros P_8^4, P_8^6 ... P_8^n (n = 4, 6, 8... par) y también los exaedros P_6^3, P_6^5, --- P_6^n (n = 3, 5, 7 impar) que forman en su conjunto la serie "S" de "n+1" términos

$$S = P_8, \quad P_6^1, \quad P_8^2, \quad P_6^3, \quad P_8^4, \quad P_6^5 \; ..... \; P^n_{8-(6)} \qquad (1)$$

Para valores pares de n "n = 2q" (q = 1, 2, 3, 4. 5 ...) se obtiene la Serie parcial "S_1" formada exclusivamente por octaedros, de "q+1" términos

$$S_1 = P_8, \quad P_8^2, \quad P_8^4, \quad P_8^6 \; ..... \; P_8^{2q} \qquad (2)$$

Para valores impares de n "n = 2q+1" (q = 1, 2. 3. 4 ...) se obtiene a su vez la nueva serie parcial "S_2", formada exclusivamente por exaedros, de "q+1" términos:

$$S_2 = P_6^1, \quad P_6^3, \quad P_6^5, \quad P_6^7 \; .... \; P_6^{2q+1} \qquad (3)$$



Las series de poliedros (1), (2) y (3) son decrecientes; por lo tanto cualquier poliedro de ellas es menor que el anterior e inscrito en este.

2) RELACIONES MÉTRICAS

Para la construcción de este modelo, utilizaremos algunas fórmulas ya deducidas anteriormente en otros ejercicios.

2.1 Arista "a_8" del octaedro generador P_8 (ver fórmula (1) del ejercicio M-8.2)

$$a_8 = \sqrt{2}\ r_{ec}^8 \qquad (4)$$

2.2 Arista "a_6^1" del oxaedro conjugado P_6^1 (ver fórmula 2) del ejercicio M-8.2)

$$a_6^1 = \frac{2}{3}\ r_{ec}^8 \qquad (5)$$

Al unir los centros de las caras del exaedro P_6^1, obtenemos el octaedro P_8^2 (Serie (2))

2.3 Radio r_{ec}^6 de la esfera circunscrita al exaedro conjugado P_6^1 y arista a_6^1.

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$" dedu-



cida en el ejercicio G.E. nº... Lámina 2, haciendo en ella $a_6 = a_6^1$. Así pues, tendremos:

$$\boxed{r_{ec}^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a_6^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}\, r_{ec}^8 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^8} \qquad (6)$$

2.4 <u>Arista "a_8^2" del octaedro</u> P_8^2 <u>conjugado del</u> P_6^1. – (Se obtiene de la fórmula (2) del ejercicio M-7.2 "$a_8' = \frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^6$" en la que $a_8' = a_8^2$ y $r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^8$ (ver fórmula (6)). Sustituyendo valores, tendremos:

$$\boxed{a_8^2} = a_8' = \frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^8 = \frac{\sqrt{18}}{9}\, r_{ec}^8 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}\, r_{ec}^8} \qquad (7)$$

Los octaedros regulares P_8 y P_8^2 (Serie 2), son semejantes, siendo su razón de semejanza $\frac{a_8^2}{a_8}$ la de sus aristas homólogas. Sustituyendo los valores de a_8 (4) y de a_8^2 (7), tendremos:

$$\boxed{\frac{a_8^2}{a_8}} = \sqrt{2}\, r_{ec}^8 : \frac{\sqrt{2}}{3}\, r_{ec}^8 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{3}} < 1 \qquad (8)$$

Con las magnitudes a) fórmula (4); b) fórmula (5) y c) fórmula (7), podemos construir este modelo M-8.3 que limitamos a los siguientes poliedros:

1º) Octaedro generador "P_8" de caras vaciadas.

2º) Exaedro "P_6^1" conjugado del octaedro "P_8", de caras



vaciadas con sus correspondientes pirámides cuadradas para fijación de los vértices del $\underline{P_8}$

3°) Octaedro "$\underline{P_8^2}$" conjugado del exaedro "$\underline{P_6^1}$" de caras macizas, con sus correspondientes pirámides triangulares para fijación de los vértices del "$\underline{P_6^1}$".

Análogamente a lo expuesto en el ejercicio M-7.3, supongamos ahora que el octaedro "P_8^2" es a su vez, generador del exaedro "P_6^3" (Serie 3) (conjugado del P_8^2), del octaedro P_8^4 (Serie 2) (conjugado del P_6^3). El modelo formado por los poliedros P_8^2, P_6^3, y P_8^4 sería semejante al que estudiamos (Modelo M-8.3), aun cuando de menor tamaño, siendo la razón de semejanza la de $\frac{1}{3}$ (ver fórmula 8), menor que la unidad.

Esta propiedad nos permite calcular fácilmente las dimensiones lineales de los poliedros P_8^2, P_6^3, P_8^4, bastando pués multiplicar por la razón de semejanza "$\frac{1}{3} < 1$" las respectivas magnitudes lineales homólogas de los poliedros P_8, P_6^1, P_8^2.

En la determinación de superficies se empleará la razón $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ y en la de volúmenes, la razón $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, deducimos que las magnitudes lineales de los poliedros de la Serie (2) forman una progresión geométrica indefinida cuyo primer término son las del octaedro generador P_8,

Calvarte Octubre / 1981

y de razón $\frac{1}{3} < 1$.

Las lineales de la Serie (3) forman igualmente otra progresión geométrica indefinida cuyo primer términos son las del exaedro P'_6, conjugado del octaedro generador P_8 y deducidas independientemente de las de éste, siendo su razón también la de $\frac{1}{3} < 1$.

Las magnitudes superficiales (áreas) o volumétricas de las Series (2) y (3), forman análogamente progresiones geométricas indefinidas de razones $\left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$, y $\left(\frac{1}{3}\right)^3 < 1$, respectivamente.

Haremos observar que en todas las progresiones geométricas indefinidas descritas anteriormente, la suma de sus infinitos términos es finita por ser su razón menor que la unidad. Dicha suma se obtiene por la fórmula

$$\Sigma = \frac{a}{1 - r}$$

en la que "a" es el valor numérico de su primer término, y "$r < 1$" es la razón geométrica correspondiente.

3) CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

3A) OCTAEDRO GENERADOR "P_8" REGULAR CONVEXO, DE CARAS VACIADAS



La arista "a_8" se deduce de la fórmula (4) de este ejercicio

$$\boxed{a_8} = \sqrt{2}\ r_{ec}^{8} \cong 1,41\ 42\ 13\ 56\ 2... \times 110 \cong \boxed{155,6\ mm.}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-3.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-3.102

---

3 B) EXAEDRO REGULAR CONVEXO P_6^1, CONJUGADO DEL OCTAEDRO P_8, DE CARAS VACIADAS

Su arista "a_6^1" se deduce de la fórmula (5) de este ejercicio:

$$\boxed{a_6^1} = \frac{2}{3}\ r_{ec}^{8} \cong 0,\widehat{6} \times 110 \cong \boxed{73,3\ mm}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES CUADRADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1



4

4 4

4

73,3 □

Figura 1

PIEZA Nº 3

6(u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

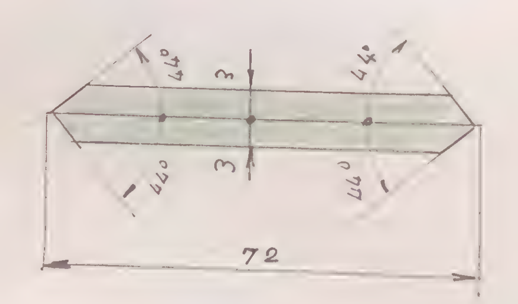


Figura 2

PIEZA Nº 4

12 (u)

Figura 2

3C) PIRÁMIDES AUXILIARES DE CARAS VACIADAS, RECTAS Y CUADRADAS, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL OCTAEDRO REGULAR "P_8" A LAS CARAS DEL EXAEDRO P_6^1.

La arista lateral "a_4" de estas pirámides auxiliares, se obtiene de la fórmula "$a_4 =$ (Ver fórmula (6) del ejercicio M-8.2). - La longitud de la base de dichas pirámides es la de la arista "a_6^1" del exaedro conjugado "P_6^1" (ver fórmula (5) de este ejercicio). - Por consiguiente, será:

Modelo M - 8.3

$$\boxed{a_4} = \frac{\sqrt{6}}{3} \, r_{ec}^{\,1} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 110 = 0,81\,64\,96\,58\,1... \times 110 = \boxed{89.8 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES 3C) 6 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

AB = BC = CD = DA' = 73.3 mm

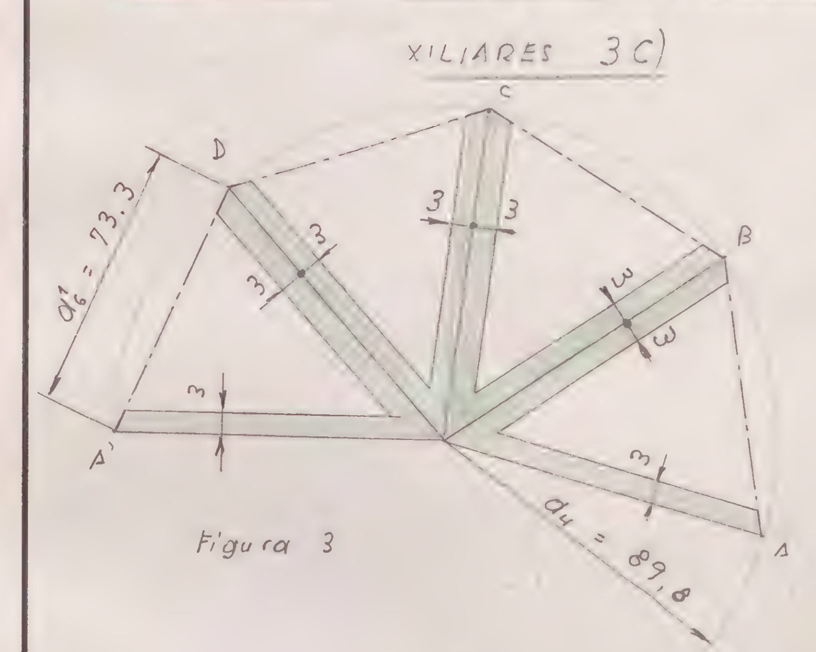


Figura 3

PIEZA Nº 5 6 (u)

Figura 3

NOTA: La figura 3 es igual a la figura 6 del ejercicio M - 8, 2

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 24 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4

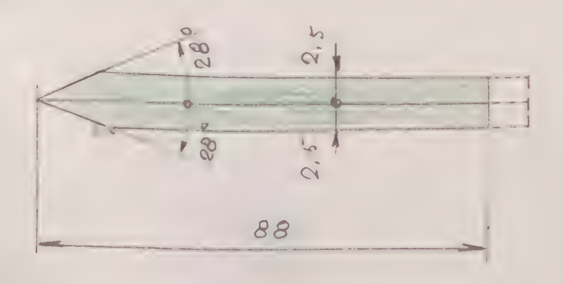


Figura 4

PIEZA Nº 6

24 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Octubre 1981



3 D) OCTAEDRO "P_8^2" CONJUGADO DEL EXAEDRO "P_6^1", REGULAR CONVEXO, DE CARAS MACIZAS.

La arista "a_8^2" se deduce de la fórmula (7) de este ejercicio:

$$\boxed{a_8^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times 110 \cong 0,47\,14\,04\,52\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{51.9 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 7 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES

8 unidades

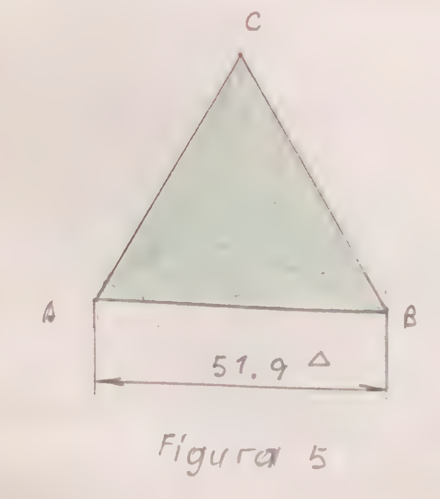


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 8 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

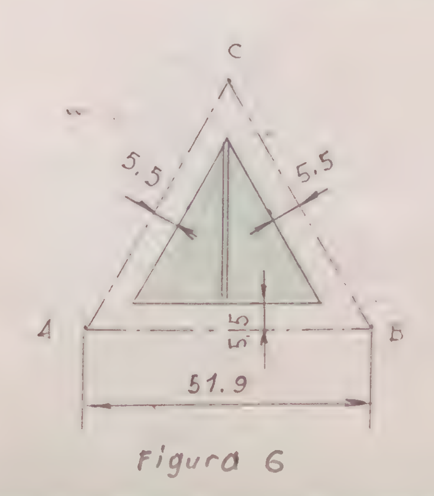


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 5, y se detallan en la fig. 6

PIEZA Nº 8 8 (u)

Figura 6



Modelo M - 8.3

PIEZA Nº 9 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 16 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 6

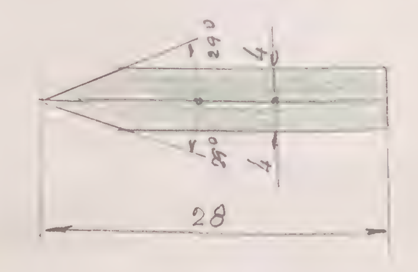


Figura 7

PIEZA Nº 9 16 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

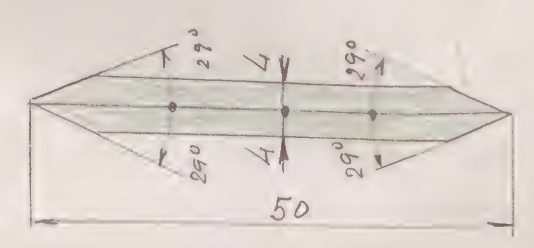


Figura 8

PIEZA Nº 10 12 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 11 FORRO COLEREADO 8 unidades

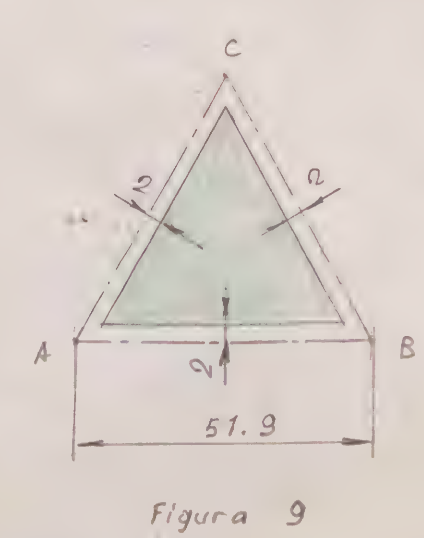


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 5, y se detallan en la fig. 9.

PIEZA Nº 11 8 (U)

Figura 9

Octubre 1981



3 E) PIRÁMIDES AUXILIARES DE CARAS VACIADAS, RECTAS Y TRIANGULARES, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL EXAEDRO REGULAR "P_6^1" A LAS CARAS DEL OCTAEDRO "P_8^2".

Para obtener el desarrollo lateral de estas pirámides auxiliares se precisa conocer las siguientes magnitudes lineales:

a) Longitud de la arista de su base triangular, y

b) Longitud de la arista lateral de la pirámide.

La longitud de la base, es igual a la de la arista a_8^2 del octaedro P_8^2 ya calculada en este ejercicio (Ver fórm. 7) Su valor numérico es:

$$\boxed{a_8^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\, r_{ec}^{8} \cong 0.47\,14\,04\,52\,1\ldots \times 110 = \boxed{51.9 \text{ mm}}$$

La longitud de la arista lateral "a_4" se obtiene considerando que uno de sus extremos es el vértice de una cara del octaedro "P_8^2" y (que por ser conjugado del P_6^1), es a su vez coincidente con el centro G de una cara del P_6^1. (figura 10). Por consiguiente el segmento $\overline{CG} = a_4$ es igual al radio r_{cc}^4 de la circunferencia circunscrita al cuadrado ABCD de lado $l_4 = a_6^1$.

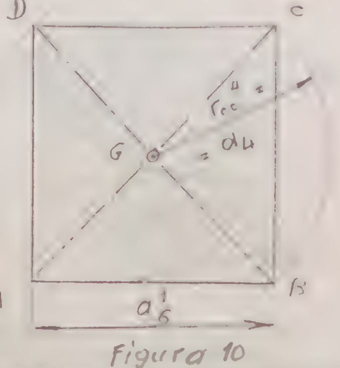


Figura 10

Así pues, tendremos.- (Ver fórmula (1) del ejercicio G.P. 1400-43)

$a_4 = r_{cc}^{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times a_6^1$ y siendo $a_6^1 = \frac{2}{3} r_{ec}^{8}$ (Ver fórmula (5) de este ejercicio, tendremos finalmente:

$$\boxed{a_4} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3} r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{3} r_{ec}^{8} \cong 0{,}4714045\ldots \times 110 \cong \boxed{51{,}9 \text{ mm}}$$

NOTA.- Obsérvese la igualdad de los valores $a_8^2 = a_4 = \frac{1}{3} a_8 = a_8 \times$ razón de semejanza (ver hoja 5 de este ejercicio)

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES TRIANGULADAS, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL 8 unidades

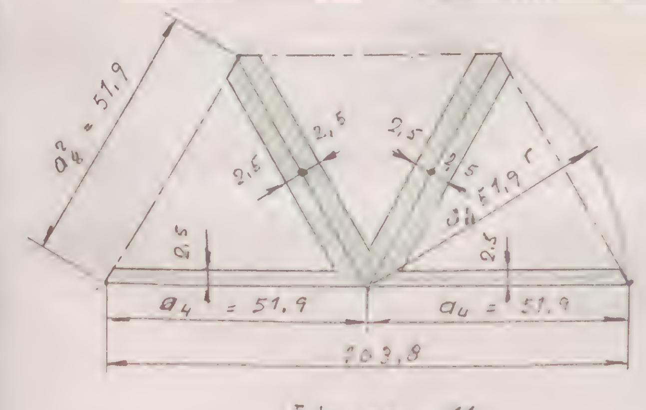


Figura 11

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

PIEZA Nº 12 8(u)

Figura 11

PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS 24 unidades

29°
2
29°
2
51

Figura 12

Su forma y dimensiones se detallan en la figura nº 12

PIEZA Nº 12 24(u)

Figura 12

Alvarez Octubre 1981

UNE A4 210 x 297



Modelo M- 8.3

Patrones



MODELO CORPÓREO DEL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO (GENERADOR), SIENDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL DODECAEDRO GENERADOR, SERÁ DE CARAS VACIADAS, Y EL ICOSAEDRO GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 76.1 \text{ mm}$$



		Modelo M- 9.1

Láminas 6 al 10, los valores analíticos de las magnitudes de los poliedros conjugados, en función de los respectivos poliedros generadores, cuyos valores nos servirán para la construcción de los modelos correspondientes.

Para la construcción de este modelo M- 9.1, calcularemos previamente las siguientes magnitudes, en función del único dato del problema (radio r_{ec}^{12} de la esfera circunscrita al dodecaedro generador).

1) Arista "a_{12}" del dodecaedro generador

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a_{12}$", obtenida en el ejercicio G. E. n°--- Lámina 4. Despejando en ella "a_{12}", tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \left(1 : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\right) \cdot r_{ec}^{12} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{4 \times (\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12}} \qquad (1)$$

---

2) Arista "a'_{20}" del icosaedro conjugado

Se deduce de la fórmula "$a'_{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} a_{12}$" (ver fórmula (2) del ejercicio G. E. n°... Lámina 9).- Sustituyendo en ella el valor (1), tendremos:



$$\boxed{a'_{20}} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, a_{12} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} = \frac{(5+3\sqrt{5}) \times (\sqrt{15}-\sqrt{3})}{30}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{5\sqrt{15} + 3\sqrt{75} - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{15}}{30}\, r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15} + 3 \times 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{30}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15} + 15\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{30}\, r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15} + 10\sqrt{3}}{30}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15}\, r_{ec}^{12}} \qquad (2)$$

---

3) Radio "r_{i-5}" de la circunferencia inscrita al pentágono regular convexo de una cara del dodecaedro generador

Se obtiene de la fórmula "$r_{i-5} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, a_{12}$" (ver fórmula (5) del ejercicio G.P. 1.400-44). Sustituyendo en ella el valor (1), tendremos:

$$\boxed{r_{i-5}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\right)^2}\, r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{9}}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \frac{15+3-2\sqrt{45}}{9}}\, r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \frac{18-6\sqrt{5}}{9}}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \frac{6-2\sqrt{5}}{3}}\, r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10 \times 3}}\, r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{30}}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, r_{ec}^{12}} \qquad (3)$$

Las fórmulas (1), (2) y (3), aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes valores numéricos:



$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} \cong 0,71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 76.1 \cong \boxed{54.3 \text{ mm}} \qquad (1)$$

$$\boxed{a'_{20}} = \frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{15}\, r_{ec}^{12} \cong 0,83\,55\,49\,15\,9\ldots \times 76.1 \cong \boxed{63.6 \text{ mm}} \qquad (2)$$

$$\boxed{r_{I-5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, r_{ec}^{12} \cong 0,49\,11\,23\,47\,3\ldots \times 76.1 \cong \boxed{37.4 \text{ mm}} \qquad (3)$$

La magnitud (3) nos permite efectuar la fijación de los vértices del icosaedro conjugado, mediante su unión material de los mismos a los puntos medios de las aristas del dodecaedro generador.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) <u>DODECAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS</u>

PIEZA Nº 1 <u>CARAS SUPERFICIALES</u> <u>12 unidades</u>

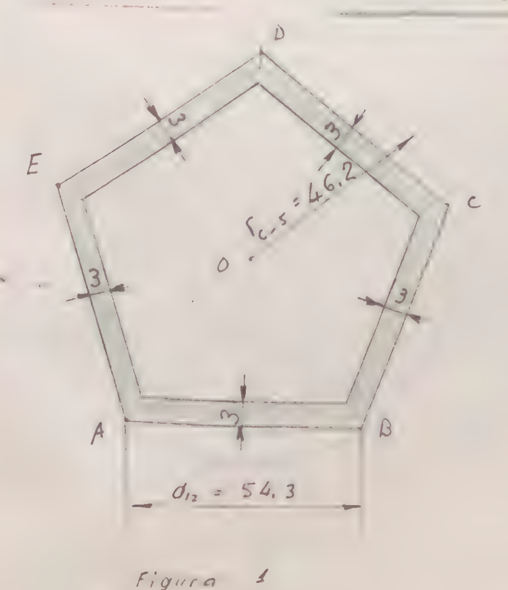


Figura 1

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1

$r_{c-5} \cong 0.85 \times 54.3 = 46.2$ mm

AB = BC = CD = DE = EA = 54.3 mm

<u>PIEZA Nº 1</u> <u>12 (u)</u>

Figura 1



Modelo M - 9.1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS . 30 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

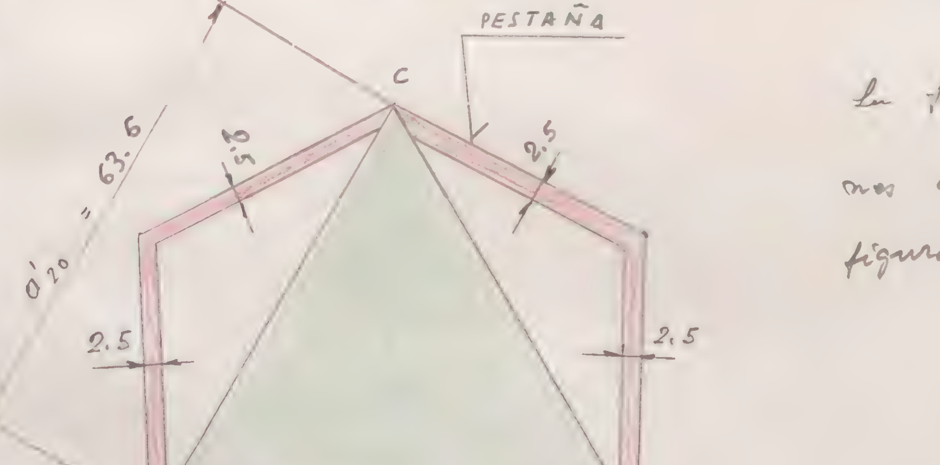
53

Figura 2

B) ICOSAEDRO CONJUGADO DE CARAS MACIZAS, CON PESTAÑAS DE FIJACIÓN DE SUS VÉRTICES A LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS ARISTAS DEL DODECAEDRO GENERADOR.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES, CON PESTAÑAS

20 unidades



La forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

PIEZA Nº 3

20 (u)

Figura 3

Figura 3

Febrero 1981



Modelo M-9.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS LATERALES

20 unidades

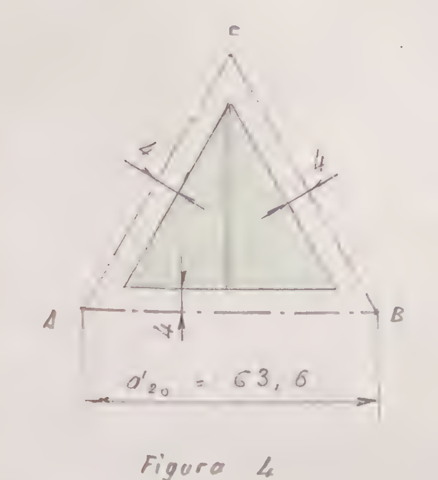


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de los del triángulo ABC de la figura 3, y se detallan en la figura 4.

PIEZA Nº 4 20 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES DE ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

29º
3
29º
29º
3
29º
62

PIEZA Nº 5 30 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO EN CARAS LATERALES

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

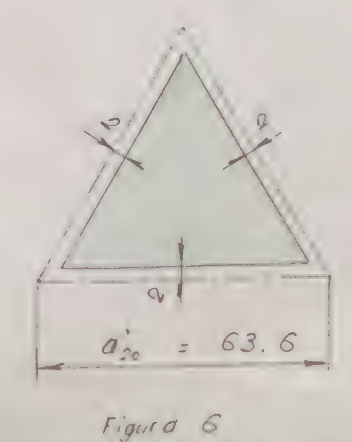


Figura 6

PIEZA Nº 6

20 (u)

Figura 6

UNE A4 210 x 297

Álvarez Febrero 1981

EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_{12}", A LA DISTANCIA "$x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} a_{12}$", SIENDO LA ARISTA "$a'_{20}$" DEL ICOSAEDRO GENERADO "$a'_{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} a_{12}$".- EL ICOSAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL DODECAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS.

"Radio" de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

ENUNCIADO EQUIVALENTE

MODELO CORPÓREO DEL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO (GENERADOR) SIENDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL DODECAEDRO GENERADOR, SERÁ DE CARAS VACIADAS, Y EL ICOSAEDRO GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$



Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-9.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular convexo, conjugado de un dodecaedro regular convexo (generador), siendo los vértices del primero, los centros de las caras del segundo. - El dodecaedro generador, será de caras vaciadas, y el icosaedro generado, de caras macizas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

r_{ec}^{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al dodecaedro generador:

$$r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm}$$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-9.1, de igual forma que éste, pero de mayor tamaño, por ser $r_{ec}^{12} = 110 \text{ mm} > 76{,}1 \text{ mm}$.

También hacemos observar que este modelo puede ser generado de forma distinta al del enunciado dado, teniendo presente el estudio realizado en el modelo M-39.7, en el que se estudió la posibilidad de obtención de algunos poliedros arquimedianos, por el proceso de "Truncadura de vértices" de los cinco poliedros regulares convexos. En dicho estudio se analizó detalladamente los distintos poliedros (arqui-

UNE A4 210 x 297

[illegible] Marzo 1981



(medianos, regulares o irregulares) que pueden obtenerse, por el mencionado proceso de "truncadura de vértices del tetraedro regular convexo", en todas las posibles posiciones del plano secante. Dicho proceso puede ser aplicado a los cuatro poliedros regulares convexos restantes (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), con análogos resultados de los que se obtuvieron en el tetraedro regular convexo. Por consiguiente, para el caso particular de este modelo, podemos enunciar directamente la siguiente proposición:

"El icosaedro regular convexo, puede ser engendrado por la truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo, cuyo plano secante pasa por el centro "G" de las tres caras pentagonales regulares correspondientes a cada uno de sus vértices. Este plano secante puede situarse por tres puntos equidistantes de cada vértice y sobre las tres aristas concurrentes en él, a la distancia "$x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} a_{12}$", siendo "$a_{12}$" la arista del dodecaedro generador. La longitud "a'_{20}" de la arista del icosaedro generado, será "$a'_{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} a_{12}$".

Estas dos últimas fórmulas, serán deducidas posteriormente." (Ver fórmulas (5) y (8)).

El icosaedro generado tiene sus vértices en los centros "G" de las caras pentagonales del dodecaedro generador.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, po-



demos establecer un nuevo enunciado al problema planteado en este ejercicio, equivalente al de este mismo modelo M-9.2, bajo el nuevo enfoque del mismo, que es el siguiente:

NUEVO ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del icosaedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices del dodecaedro regular convexo generador, a la distancia $x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} a_{12}$, siendo "$a_{12}$" la arista del dodecaedro generador. La longitud de la arista "a'_{20}" del icosaedro generado, será: $a'_{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} a_{12}$

En esta nueva construcción, efectuaremos otra forma diferente de la fijación al dodecaedro generarador, del icosaedro engendrado en su interior.

Como el icosaedro generado, ha de construirse con sus caras macizas, y el dodecaedro generador, con sus caras vaciadas, para poder situar en su posición correcta este último, construiremos sobre las veinte caras triangulares del mencionado icosaedro conjugado; otras tantas pirámides auxiliares rectas, regulares, de base triangular, cuyos vértices servirán de apoyo a los veinte del dodecaedro generador.

Previamente efectuaremos los cálculos de las longitudes siguientes:



1) Distancia "x" de la truncadura de vértices en el dodecaedro generador de arista "a_{12}" (en función de a_{12})

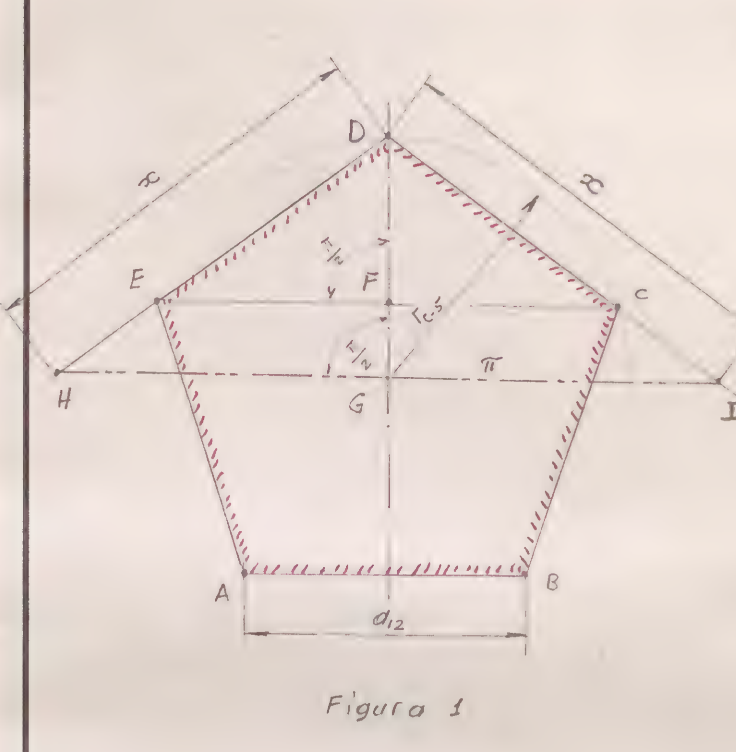


Figura 1

Sea (figura 1) ABCDE el pentágono regular de una cara del dodecaedro generador de arista $AB = a_{12}$, y G su centro.

Unamos G con D y tracemos por G la perpendicular a GD, que cortará en H e I a las prolongaciones de los lados ED y DC concurrentes en D. Unamos a continuación los vértices E y C.

De las construcciones anteriores, se deduce: 1) que los triángulos DEC y DHI, son isósceles y semejantes; 2) que la intersección del plano secante π de la truncadura de vértices en el dodecaedro generador, que pasa por G, es la traza HI; y 3) que los segmentos $DH = DI = x$, fijan la posición del plano secante π.

Por otra parte EC es la diagonal del pentágono de la cara ABCDE y HI es el lado del triángulo equilátero seccionado por la truncadura de vértices en D.

De las propiedades anteriores, se deduce:

$$\overline{EC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a_{12} \qquad (1)$$

(Ver fórmula (6) del ejercicio G.P. 1400-44)



Modelo M-9.2

$$\overline{EF} = \frac{\overline{EC}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{4} a_{12}} \quad (2)$$

y siendo el triángulo EFD rectángulo en F, tendremos:

$$\overline{DF} = \sqrt{\overline{ED}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{a_{12}^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} a_{12}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{5+1+2\sqrt{5}}{16}}\, a_{12} = \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\, a_{12} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\, a_{12}} \quad (3)$$

También es, siendo "$r_{c.5}$" el radio de la circunferencia circunscrita al pentágono ABCDE,

$$\overline{DG} = r_{c.5} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12}} \quad (4)$$

De los triángulos rectángulos semejantes EFD y HGD, se deduce:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{DG}} \; ; \quad \text{de donde} \quad \overline{HD} = x = \frac{\overline{ED} \times \overline{DG}}{\overline{DF}} \; ;$$

y sustituyendo los valores $\overline{ED} = a_{12}$; $\overline{DG} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12}$ (ver fórmula (4)), y $\overline{DF} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\, a_{12}$ (ver fórmula (3)), tendremos:

$$\boxed{\overline{HD} = x} = \frac{a_{12} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\, a_{12}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} : \frac{5-\sqrt{5}}{8}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{8(5+\sqrt{5})}{10(5-\sqrt{5})}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{4(5+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{5 \times (25-5)}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{4(5+\sqrt{5})^2}{100}}\, a_{12} =$$

/

UNE A4 210 x 297

Alvarez   Marzo 1961

$$= \frac{2(5+\sqrt{5})}{10}\, a_{12} = \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{5}\, a_{12}}$$ de donde se deduce finalmente:

$$\overline{HD} = \boxed{x = \frac{5+\sqrt{5}}{5}\, a_{12}} \qquad (5)$$

---

2) Arista "a_{12}" del dodecaedro generador (en función de r_{ec}^{12})

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, a_{12}$" obtenida en el ejercicio G.E. nº.... - Lámina 4. - Despejando en ella "a_{12}", tendremos:

$$\boxed{a_{12}} = r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \left(1 : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \right) r_{ec}^{12} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{15-3}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}} \qquad (6)$$

---

3) Arista "a'_{20}" del icosaedro conjugado

Refiriéndonos a la figura 1, hagamos notar que en la truncadura "de vértices" del dodecaedro generador, cuando el plano secante π, pasa por el centro "G" de una cara ABCDE de dicho dodecaedro, corta a ésta según la traza HI, perpendicular a DG, estando situados los puntos H e I en las prolongaciones de los lados DE y DC concurrentes en el vértice D de la correspondiente truncadura. Igual ocurrirá en



las dos caras restantes concurrentes en D que tienen las aristas DC y DE comunes con la considerada ABCDE.

Así pues la truncadura de vértices en D, por π producirá en la prolongación de sus caras, una sección triangular HIJ (figura 2), cuyos lados $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JH}$ son todos iguales, y por consiguiente equilátero, cuyos puntos medios G_1, G_2, G_3 forman a su vez otro triángulo equilátero de lado mitad al primero.

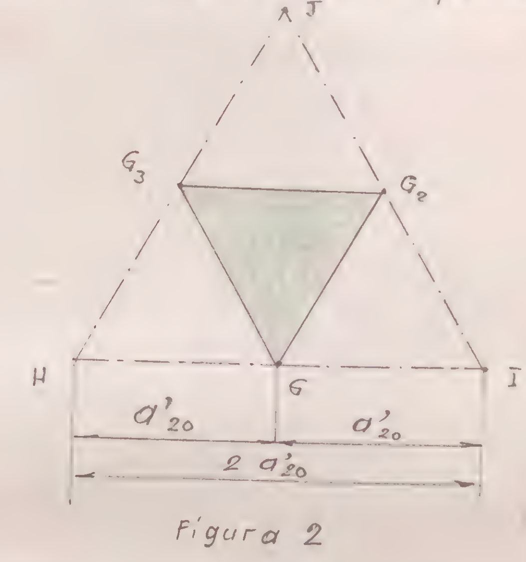


Figura 2

Este segundo triángulo $G_1 G_2 G_3$ es una de las caras de un icosaedro regular convexo, conjugado del dodecaedro generador, cuyos vértices son los centros G_1 de sus caras. Así pues, llegamos a la conclusión final de que "La arista a'_{20} del icosaedro regular núcleo de la truncadura de vértices de un dodecaedro regular convexo de arista "a_{12}" y a la distancia "$x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} a_{12}$" (ver fórmula 5), tiene por longitud la del segmento HG" (ver figuras 1 y 2)

De acuerdo con esta conclusión, de la semejanza de los triángulos rectángulos EFD y HGD, se deduce también:

$\frac{\overline{HG}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$; y de aquí: $\overline{HG} = \frac{\overline{DG} \times \overline{EF}}{\overline{DF}}$; y sustituyendo los valores $\overline{DG} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12}$ (ver fórmula 4); $\overline{EF} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} a_{12}$ (ver fórm. 2),



y $\overline{DF} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\, a_{12}$ (ver fórmula 3), tendremos:

$$\boxed{\overline{HG}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{12} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}\, a_{12}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\, a_{12}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} : \frac{5-\sqrt{5}}{8}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}\, a_{12} = \sqrt{\frac{8\,(5+\sqrt{5})}{10\,(5-\sqrt{5})}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{4(5+\sqrt{5})\,(5+\sqrt{5})}{5\times(25-5)}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}\, a_{12} = \sqrt{\frac{4\times(5+\sqrt{5})^2}{100}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}\, a_{12} =$$

$$= \frac{2\,(5+\sqrt{5})}{10} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}\, a_{12} = \frac{(5+\sqrt{5})\,(\sqrt{5}+1)}{5\times 4}\, a_{12} = \frac{5\sqrt{5}+5+5+\sqrt{5}}{20}\, a_{12} =$$

$$= \frac{10+6\sqrt{5}}{20}\, a_{12} = \boxed{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, a_{12}} \qquad (7)$$

Al comienzo de este párrafo, hemos demostrado que el segmento $\overline{HG}$ es igual a la arista "a'_{20}" del icosaedro conjugado que, en función del radio r_{ec}^{12}, (dato del ejercicio) la obtendremos sustituyendo en (7) el valor de a_{12} por $a_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12}$ (ver fórmula 6). Así pues, será

$$\overline{HG} = \boxed{a'_{20}} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, a_{12} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{(5+3\sqrt{5})\,(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{30}\, r_{ec}^{12} = \frac{5\sqrt{15}+3\sqrt{75}-5\sqrt{3}-3\sqrt{15}}{30}\, r_{ec}^{12} =$$

UNE A4 210 x 297



$$= \frac{2\sqrt{15} + 3 \times 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{30} r_{ec}^{12} = \frac{2\sqrt{15} + 10\sqrt{3}}{30} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12}}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a'_{20} = \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12}} \qquad (8)$$

valor coincidente con el de la fórmula (1) del ejercicio M-9.1, obtenido por otro proceso diferente.

---

3) Radio "r_{c-3}" de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de una cara del icosaedro conjugado.

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3} l_3$" deducida en el ejercicio (2) G.P. 1400-4, haciendo en ella $l_3 = a'_{20} = \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12}$ (ver fórmula (8)). Así pues será:

$$\boxed{r_{c-3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} l_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{45} + 5 \times 3}{45} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{3\sqrt{5} + 15}{45} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{5 + \sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12}} \qquad (9)$$

---

4) Radio "$r_{ei}^{20'}$" de la esfera inscrita al icosaedro conjugado

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{ei}^{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a_{20}$", dedu-



rida en el ejercicio A. E. n° ... - Lámina 5, en función de su arista "a_{20}"; haciendo en ella $r_{ei}^{20} = r_{ei}^{20'}$ y $a_{20} = a'_{20} =$
$= \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12}$ (por fórmula (2)), tendremos:

$$\boxed{r_{ei}^{20'}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} + \sqrt{15})(\sqrt{15} + 5\sqrt{3})}{12 \times 15} r_{ec}^{12} = \frac{3\sqrt{45} + 15 + 15\times 3 + 5\sqrt{45}}{12 \times 15} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{8\sqrt{45} + 15 \times 4}{12 \times 15} r_{ec}^{12} = \frac{2 \times \sqrt{45} + 15}{3 \times 15} r_{ec}^{12} = \frac{6\sqrt{5} + 15}{3 \times 15} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5} + 5}{15} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12}} \qquad (10)$$

---

5) Altura "h_3" de las pirámides auxiliares rectas, triangulares, regulares.

Se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{12}" de la esfera circunscrita al dodecaedro generador (dato del ejercicio) y del radio "$r_{ei}^{20'}$" (fórmula 10). Así pues será:

$$\boxed{h_3} = r_{ec}^{12} - r_{ei}^{20'} = r_{ec}^{12} - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12} = \left(1 - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}\right) r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{15 - 5 - 2\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12} = \boxed{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12}} \qquad (11)$$

UNE A4 210 x 297



6.) Arista "a_3" de las pirámides auxiliares, rectas, triangulares, regulares.

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: Uno, la altura "$h_3 = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12}$" (ver fórmula (11)), y el otro el radio "$r_{c-3} = \frac{5+\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12}$" (ver fórmula (9)). - Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_3} = \sqrt{(h_3)^2 + (r_{c-3})^2} = \sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{12}\right)^2 + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{15} r_{ec}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})^2}{15^2} + \frac{(5+\sqrt{5})^2}{15^2}}\, r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{100+20-40\sqrt{5}+25+5+10\sqrt{5}}{15^2}}\, r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{150-30\sqrt{5}}{15^2}}\, r_{ec}^{12} = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{12}} \qquad (12)$$

Las fórmulas (6), (8) y (12), aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes valores numéricos: ($r_{ec}^{12} = 110$ mm)

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} \cong 0.71\ 36\ 44\ 17\ 9 \ldots \times 110 \cong \boxed{78.5 \text{ mm}} \qquad (6)$$

$$\boxed{a'_{20}} = \frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12} \cong 0.83\ 55\ 49\ 15\ 9 \ldots \times 110 \cong \boxed{91.9 \text{ mm}} \qquad (8)$$

$$\boxed{a_3} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{12} \cong 0.60\ 70\ 61\ 99\ 8 \ldots \times 110 \cong \boxed{66.8 \text{ mm}} \qquad (12)$$

La magnitud (12) nos permite efectuar la fijación de los vértices del icosaedro conjugado, y situarlos en los cen-

UNE A4:210 x 297



tros de las caras del dodecaedro generador.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-4.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-4.102

B) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

C

A B

$O'_{20} = 91.9$

Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 3 20 (u)

Figura 1

UNE A4 210 x 297



PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

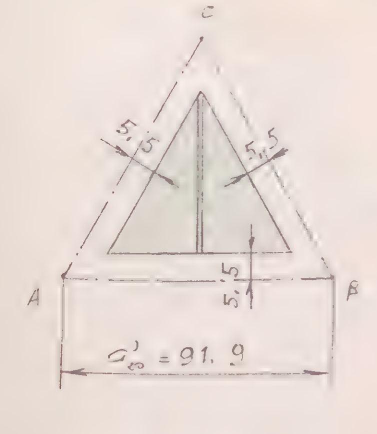


Figura 2

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo regular ABC de la figura 1. y se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 4 20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 40 unidades

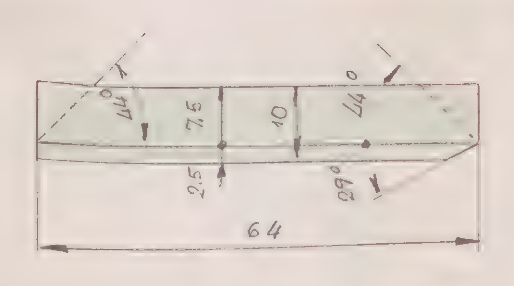


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3; su colocación en la figura 2

PIEZA Nº 5 40 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades

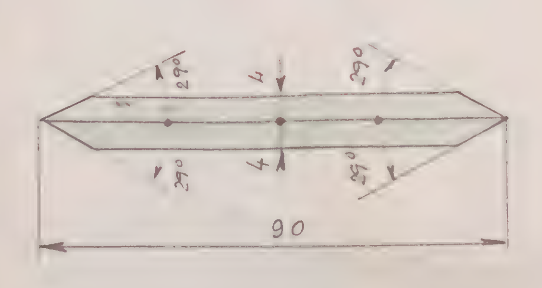


Figura 4

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 4

Alvarez Marzo 1981



Modelo M - 9.2

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 20 unidades

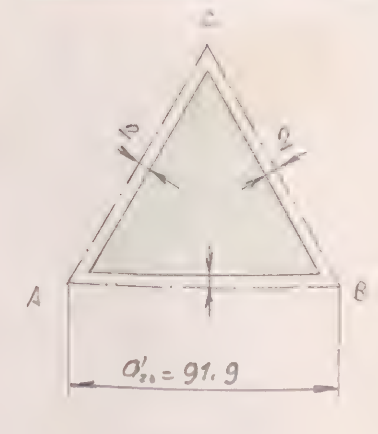


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 20 (u)

Figura 5

C) PIRÁMIDES AUXILIARES TRIANGULARES, RECTAS, REGULARES, DE CARAS VACIADAS.

PIEZA Nº 8 DESARROLLO LATERAL 20 unidades

A
3
$a_3 = 66.8$
B
3.3
3
A
3.3
$a'_{20} = 91.9$
C

Figura 6

Su forma y dimensiones se detallan en la fig. 6

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a'_{20}$

PIEZA Nº 8 20 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 60 unidades

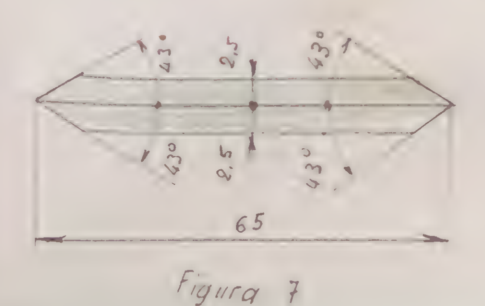


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8.

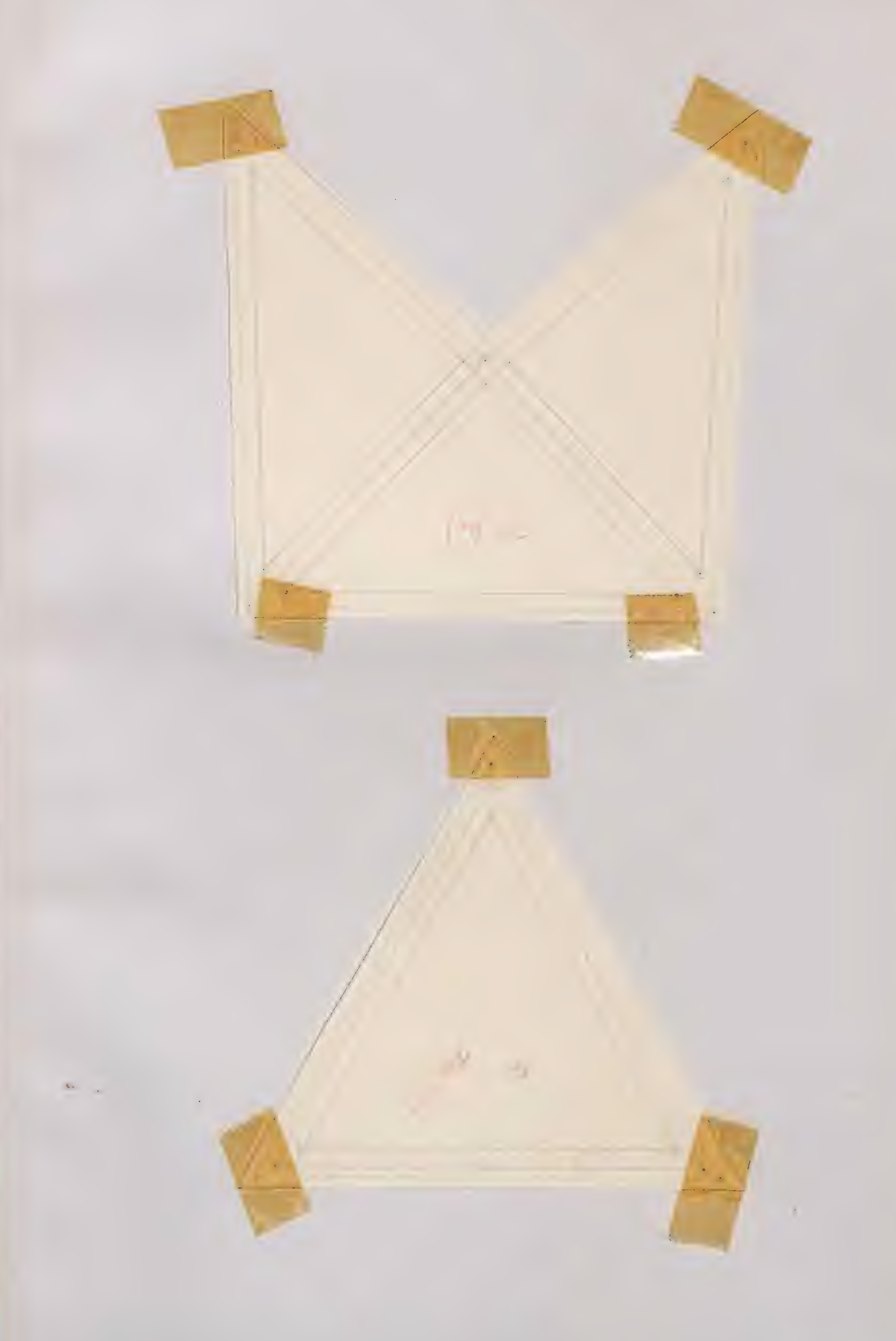
PIEZA Nº 9 60 (u)

Figura 7

UNE A4 210 x 297

Alvarez Marzo 1981

MODELO M-9.2 Patrones



MODELO CORPÓREO DE LA "SERIE ALTERNATIVA DE ICOSAEDROS Y DODECAEDROS REGULARES CONVEXOS" "P^1_{20}, P^2_{12}, P^3_{20}, P^4_{12}, P^5_{20}..... $P^n_{20-(12)}$" CONJUGADOS DE UN DODECAEDRO REGULAR CONVEXO P_{12}, EN LOS CUALES LOS VÉRTICES DE LOS ICOSAEDROS ENGENDRADOS P^1_{20}, P^3_{20}, P^5_{20} .... P^n_{20} (n = 1, 3, 5... impar), Y LOS VÉRTICES DE LOS DODECAEDROS ENGENDRADOS P^2_{12}, P^4_{12}, P^6_{12}, P^8_{12} ... P^n_{12} (n = 2, 4, 6, 8 ... par), SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL ANTERIOR.

Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro P_{12} regular convexo generador:

$$r^{12}_{ec} = 110 \text{ mm}$$



Modelo M-93

será pues "conjugado del dodecaedro generador P_{12}".

Si repetimos la operación anterior, uniendo los centros de las caras del icosaedro P^1_{20}, obtendríamos un dodecaedro regular convexo P^2_{12}, de caras paralelas al generador P_{12}, y cuyos vértices estarán situados a su vez en los centros G' de las caras del icosaedro P^1_{20}. Así sucesivamente se obtendrán alternadamente los dodecaedros P^4_{12}, P^6_{12} ... P^n_{12} (n = 4, 6, 8... par) y también los icosaedros P^3_{20}, P^5_{20} ... P^n_{20} (n = 3, 5, 7... impar), que forman en su conjunto la serie "S" de "n+1" términos.

$$S = P_{12},\ P^1_{20},\ P^2_{12},\ P^3_{20},\ P^4_{12},\ P^5_{20} \ldots P^n_{12-(20)} \qquad (1)$$

Para valores pares de n "n = 2q" (q = 1, 2, 3, 4, 5 ...) se obtiene la Serie parcial "S_1" formada exclusivamente por dodecaedros de "q+1" términos:

$$S_1 = P_{12},\ P^2_{12},\ P^4_{12},\ P^6_{12} \ldots P^{2q}_{12} \qquad (2)$$

Para valores impares de n "n = 2q+1" (q = 1, 2, 3 ....) se obtiene a su vez la nueva Serie parcial "S_2", formada exclusivamente por icosaedros de "q+1" términos:

$$S_2 = P^1_{20},\ P^3_{20},\ P^5_{20},\ P^7_{20} \ldots P^{2q+1}_{20} \qquad (3)$$

UNE A4 210 x 297

Las series de poliedros (1), (2) y (3) son decrecientes; por lo tanto, cualquier poliedro de ellas es menor que el anterior e inscrito en éste.

2) RELACIONES MÉTRICAS

Para la construcción de este modelo, utilizaremos algunas fórmulas ya deducidas en anteriores ejercicios.

2.1 Arista "a_{12}" del dodecaedro generador P_{12} (Ver fórmula (6) del ejercicio M-9.2)

$$a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \, r_{ec}^{12} \qquad (4)$$

2.2 Arista "a_{20}^{1}" del icosaedro conjugado P_{20}^{1} (Ver fórmula (8) del ejercicio M-9.2)

$$a_{20}^{1} = \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} \, r_{ec}^{12} \qquad (5)$$

Al unir los centros de las caras del icosaedro P_{20}^{1}, obtenemos el dodecaedro P_{12}^{2} (Serie 2).

2.3 Radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al icosaedro conjugado P_{20}^{1} y arista a_{20}^{1}.

UNE A4 210 x 297



Su valor se obtiene de la fórmula " $r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$ " deducida en el ejercicio G. E. nº.... lámina 5, haciendo en ella $a_{20} = a_{20}^{1}$. (Ver fórmula 5).-

$$\boxed{r_{ec}^{20}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{12} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times a_{20}^{1} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times (\sqrt{15} + 5\sqrt{3})}{60} r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{2 \times (5 + \sqrt{5}) \times (\sqrt{15} + 5\sqrt{3})^2}}{60} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times (5 + \sqrt{5}) \times (15 + 25 \times 3 + 10\sqrt{45})}}{60} r_{ec}^{12} = \frac{\sqrt{2 \times (5 + \sqrt{5}) \times (90 + 30\sqrt{5})}}{60} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times (5 + \sqrt{5}) \times 30 \times (3 + \sqrt{5})}}{60} r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{60 \times (5 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{60^2}} r_{ec}^{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 5}{60}} r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{60}} r_{ec}^{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} r_{ec}^{12}} \qquad (6)$$

2.4 Arista " a_{12}^{2} " del dodecaedro P_{12}^{2} conjugado del P_{20}^{1} -

Se obtiene de la fórmula (3) del ejercicio M - 10.2 " $a_{12}^{1} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} r_{ec}^{20}$ " en la que $a_{12}^{1} = a_{12}^{2}$ y $r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} r_{ec}^{12}$ (ver fórmula 6).

Sustituyendo valores, tendremos:

$$\boxed{a_{12}^{2}} = a_{12}^{1} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} r_{ec}^{20} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{5}} \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} r_{ec}^{12} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{2 \times (5 + \sqrt{5}) \times (5 + 2\sqrt{5})}{5 \times 15}} r_{ec}^{20} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{2 \times (25 + 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 10)}{3 \times 5^2}} r_{ec}^{12} =$$



		Modelo M-9.3

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{2 \times (35 + 15\sqrt{5})}{3 \times 5^2}}\; r_{ec}^{12} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{2 \times 5 \times (7 + 3\sqrt{5})}{3 \times 5^2}}\; r_{ec}^{12} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2 \times (7 + 3\sqrt{5})}{15}}\; r_{ec}^{12}} \quad b \qquad (7)$$

Los dodecaedros regulares P_{12} y P^2_{12} (Serie 2), son semejantes, siendo la razón de semejanza " $\frac{a^2_{12}}{a_{12}}$ " de sus aristas homólogas. Sustituyendo los valores de a_{12} (4) y de a^2_{12} (7), tendremos:

$$\boxed{\frac{a^2_{12}}{a_{12}}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\,(7 + 3\sqrt{5})}{15}}\; r_{ec}^{12} : \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\; r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{2\,(7 + 3\sqrt{5})}{15}} : (\sqrt{15} - \sqrt{3}) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(7 + 3\sqrt{5})}{15\,(\sqrt{15} - \sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{2\,(7 + 3\sqrt{5})}{15\,(15 + 3 - 2\sqrt{45})}} = \sqrt{\frac{2\,(7 + 3\sqrt{5})}{15\,(18 - 6\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{15\,(9 - 3\sqrt{5})}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{15 \times 3\,(3 - \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(7 + 3\sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{45 \times 4}} = \sqrt{\frac{21 + 9\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + 15}{2^2 \times 3^2 \times 5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36 + 16\sqrt{5}}{2^2 \times 3^2 \times 5}} = \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{3^2 \times 5}} = \boxed{\frac{1}{3} \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{5}} < 1} \quad b \qquad (8)$$

0.63 14 75 73 0...

Con las magnitudes a) fórmula (4); b) fórmula (5) y c) fórmula (7), podemos construir este modelo M-9.3, que limitamos a los siguientes poliedros:

1º) Dodecaedro generador " P_{12} " de caras vaciadas.

2º) Icosaedro conjugado " P^1_{20} " del dodecaedro " P_{12} ", de ca-

Alvarez — Noviembre 1981

UNE A4 210 x 297



ras vaciadas, con sus correspondientes pirámides triangulares para fijación de los vértices del "P_{12}".

3°) Dodecaedro P^2_{12} conjugado del icosaedro P^1_{20} de caras macizas con sus correspondientes pirámides pentagonales para fijación de los vértices del P^1_{20}

Análogamente a lo expuesto en el ejercicio M-7.3, supongamos ahora que el dodecaedro "P^2_{12}" es a su vez, generador del icosaedro "P^3_{20}" (Serie (3) y conjugado del "P^2_{12}") y del dodecaedro "P^4_{12}" (Serie (2) y conjugado del P^3_{20}). El modelo formado por los poliedros P^2_{12}, P^3_{20} y P^4_{12} sería semejante al que estudiamos (Modelo M-9.3), aun cuando de menor tamaño, siendo la razón de semejanza la de $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} < 1$ (ver fórmula (8)), menor que la unidad.

Esta propiedad nos permite calcular fácilmente las dimensiones lineales de los poliedros P^2_{12}, P^3_{20}, P^4_{12}, bastando pues multiplicar por la razón de semejanza =
$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} = 0{,}63\ 14\ 75\ 73\ 0 \ldots < 1$ las respectivas magnitudes lineales homólogas de los poliedros P_{12}, P^1_{20}, P^2_{12}.

En la determinación de superficies se empleará la razon $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^2$, y en la de volúmenes, la razón $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^3$

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, deducimos que las magnitudes lineales de los poliedros de la Serie (2) forman una progresión geométrica indefinida,

UNE A4 210 x 297



cuyo primer término son las del dodecaedro generador "P_{12}", y su razón $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} < 1$.

Las lineales de la Serie (3) forman igualmente otra progresión geométrica indefinida cuyo primer término son las del icosaedro P^1_{20}, conjugado del dodecaedro generador P_{12} y deducidas independiente de las de éste, siendo su razón también la de $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} < 1$.

Las magnitudes superficiales (áreas) o volumétricas de las Series (2) y (3), forman análogamente progresiones geométricas indefinidas de razones $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^2 < 1$ y $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^3 < 1$ respectivamente.

Finalmente haremos observar que todas las progresiones geométricas indefinidas descritas anteriormente, la suma de sus infinitos términos <u>es Finita</u> por ser su razón menor que la unidad. Dicha suma se obtiene por la fórmula

$$\Sigma = \frac{a}{1-r}$$

en la que "a" es el valor numérico de su primer término, y "$r < 1$" es la razón geométrica correspondiente.

<u>3)</u> <u>CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PROPUESTO.</u>

<u>3A)</u> <u>DODECAEDRO GENERADOR "P_{12}" REGULAR CONVEXO, DE CARAS VACIADAS.</u>

[signature] Noviembre 1981

		Modelo M-9.3

La arista "a_{12}" se deduce de la fórmula (4) de este ejercicio:

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} r_{ec}^{12} \cong 0{,}71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{78{,}5 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-4.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-4.102

3B) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO P_{20}^{1}, CONJUGADO DEL DODECAEDRO P_{12}, DE CARAS VACIADAS

La arista "a_{20}^{1}" se deduce de la fórmula (5) de este ejercicio.

$$\boxed{a_{20}^{1}} = \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15} r_{ec}^{12} = 0{,}83\,55\,49\,15\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{91{,}9 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES

20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

UNE A4 210 x 297

[signature] Noviembre 1981



Modelo M-9.3



PIEZA Nº 5 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES 3C) 20 unidades

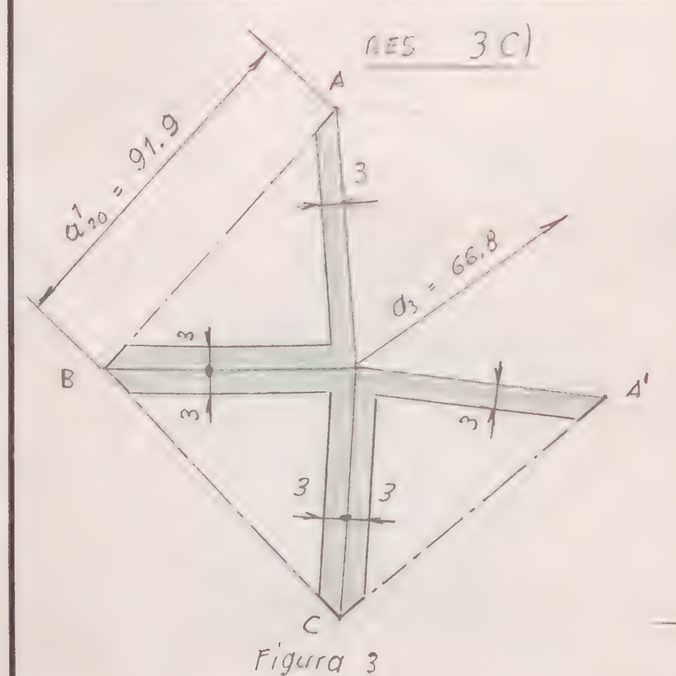


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA'} = a^1_{20}$

PIEZA Nº 5 20 (u)

Figura 3

NOTA.- La figura 3 es igual a la figura 6 del ejercicio M-9.2.

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

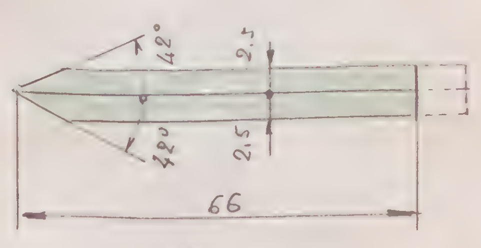


Figura 4

PIEZA Nº 6 60 (u)

Figura 4

---

3 D) DODECAEDRO "P^2_{12}" CONJUGADO DEL ICOSAEDRO P^1_{20}, REGULAR CONVEXO, DE CARAS MACIZAS.

La arista "a^2_{12}" se deduce de la fórmula (7) de este ejercicio

$$\boxed{a^2_{12}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\times(7+3\sqrt{5})}{15}}\; r_{ec}^{12} \cong 0{,}45\,06\,48\,97\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{49{,}6 \text{ mm}}$$

[illegible signature] [illegible date]



PIEZA Nº 7 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES REGULARES

12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen en la figura 5.

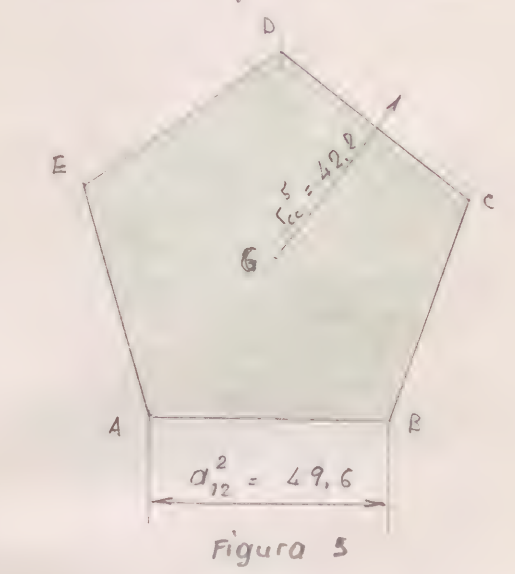


Figura 5

$$r_{cc}^{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \cdot 49{,}6 = 42{,}2 \text{ mm}$$

PIEZA Nº 7

12 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

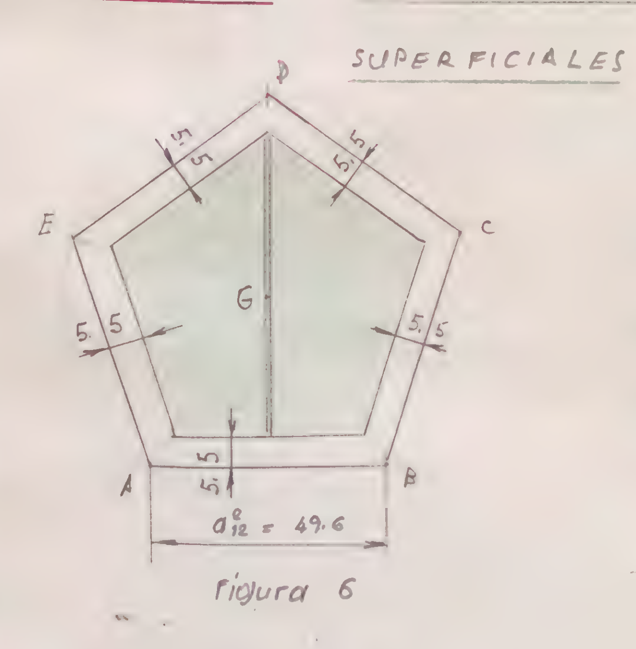


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 5, y se detallan en la figura 6

PIEZA Nº 8 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 6.



Modelo M - 9.3

PIEZA Nº 9 24 (u)

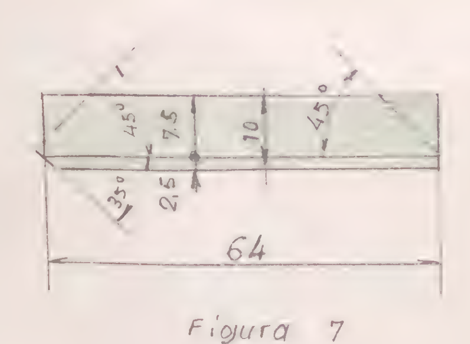


Figura 7

Figura 7

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 10 30 (u)

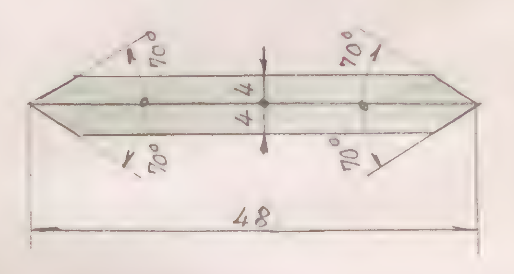


Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 5. y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 11 12 (u)

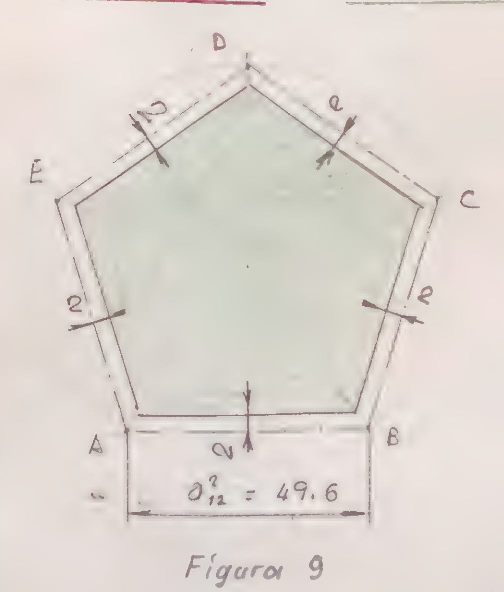


Figura 9.

Figura 9

3 E) PIRÁMIDES AUXILIARES DE CARAS VACIADAS, RECTAS Y PENTAGONALES, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL ICOSAEDRO REGULAR "P^1_{20}" A LAS CARAS DEL DODECAEDRO "P^2_{12}"

UNE A4 210 x 297

Tavares Noviembre 1981



Para obtener el desarrollo lateral de estas pirámides auxiliares, se precisa conocer previamente las siguientes magnitudes:

3E.1) Longitud "a^2_{12}" de la arista de la base pentagonal

3E.2 Longitud "a^e_5" de la arista lateral

3E.1 La longitud de la base, es igual a la de la arista "a^2_{12}" del dodecaedro P^2_{12}, ya calculada en este ejercicio (ver fórmula 7). Su valor numérico es:

$$\boxed{a^1_{12}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{2 \times (7 + 3\sqrt{5})}{15}}\; r^{12}_{ec} = 0.45\,06\,48\,97\,9\ldots \times 110 = \boxed{49.6 \text{ mm}}$$

3E.2 La longitud de la arista lateral "a^2_5" de la pirámide auxiliar pentagonal, se obtiene teniendo en cuenta que uno de sus extremos es coincidente con un vértice del icosaedro P^1_{20} y el otro extremo está situado en el centro G^1 de una cara del mismo, (por ser P^e_{12} conjugado del P^1_{20}). En la figura 10 se representa una cara ABC del icosaedro regular P^1_{20} y su baricentro G^1, en la que el segmento $\overline{CG^1}$ es el buscado "$a^2_5 = r^3_{cc}$.

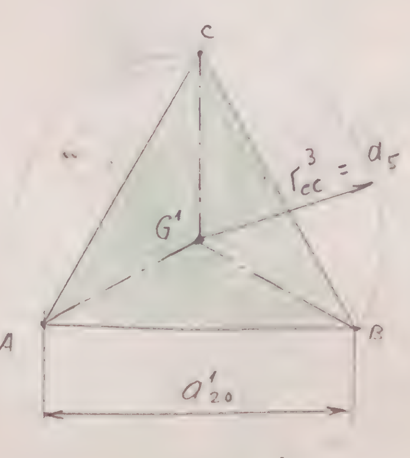


Figura 10

Por consiguiente, tendremos:

$$\boxed{a^2_5 = r^3_{cc} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_3}$$

(ver fórmula (2) del ejercicio G.P. 1400-42), y también:



Modelo M- 9.3

$$\boxed{a^{1}_{20} = l_3 = \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15}\, r^{12}_{ee}}$$ (ver fórmula (5) de este ejercicio)

y sustituyendo valores, tendremos finalmente:

$$\boxed{a^{2}_{5}} = r^{3}_{ec} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{15}\, r^{12}_{ee} = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{15} + 5\sqrt{3})}{45}\, r^{12}_{ee} =$$

$$= \frac{\sqrt{45} + 5 \times 3}{45}\, r^{12}_{ee} = \frac{3\sqrt{5} + 15}{45}\, r^{12}_{ee} = \boxed{\frac{5 + \sqrt{5}}{15}\, r^{12}_{ee}}$$

Su valor numérico es:

$$\boxed{a^{2}_{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{15} \times 110 \cong 0{,}48\ 24\ 04\ 53\ 2\ldots \times 110 \cong \boxed{53.1 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 12 — DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES PENTAGONALES RECTAS Y REGULARES, DE CARAS VACIADAS, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL ICOSAEDRO "P^{1}_{20}" A LAS CARAS DEL DODECAEDRO "P^{2}_{12}".

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

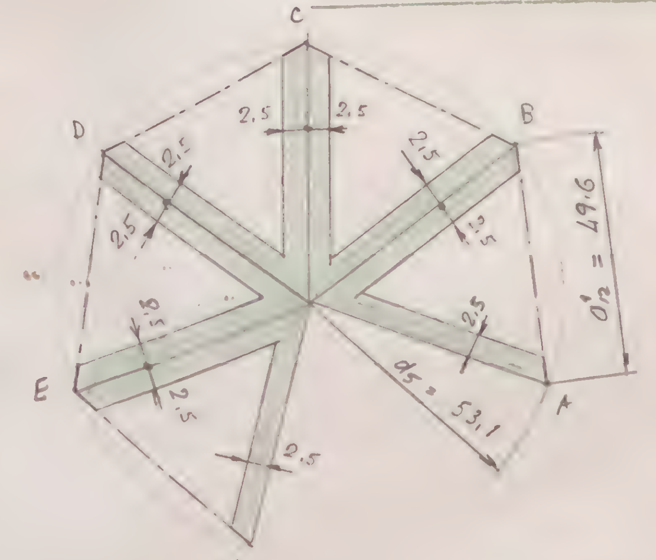


Figura 11

PIEZA Nº 12

12 (u)

Figura 11

UNE A4 210 x 297

Tavares. Noviembre 1987

Modelo M-9.3

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 60 (unidades)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

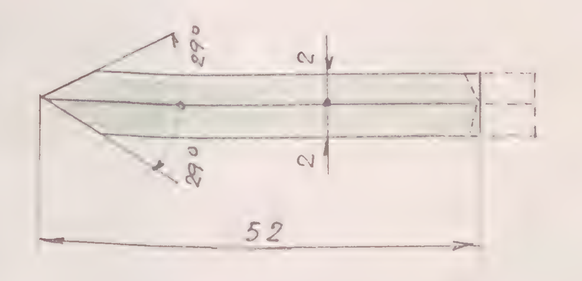
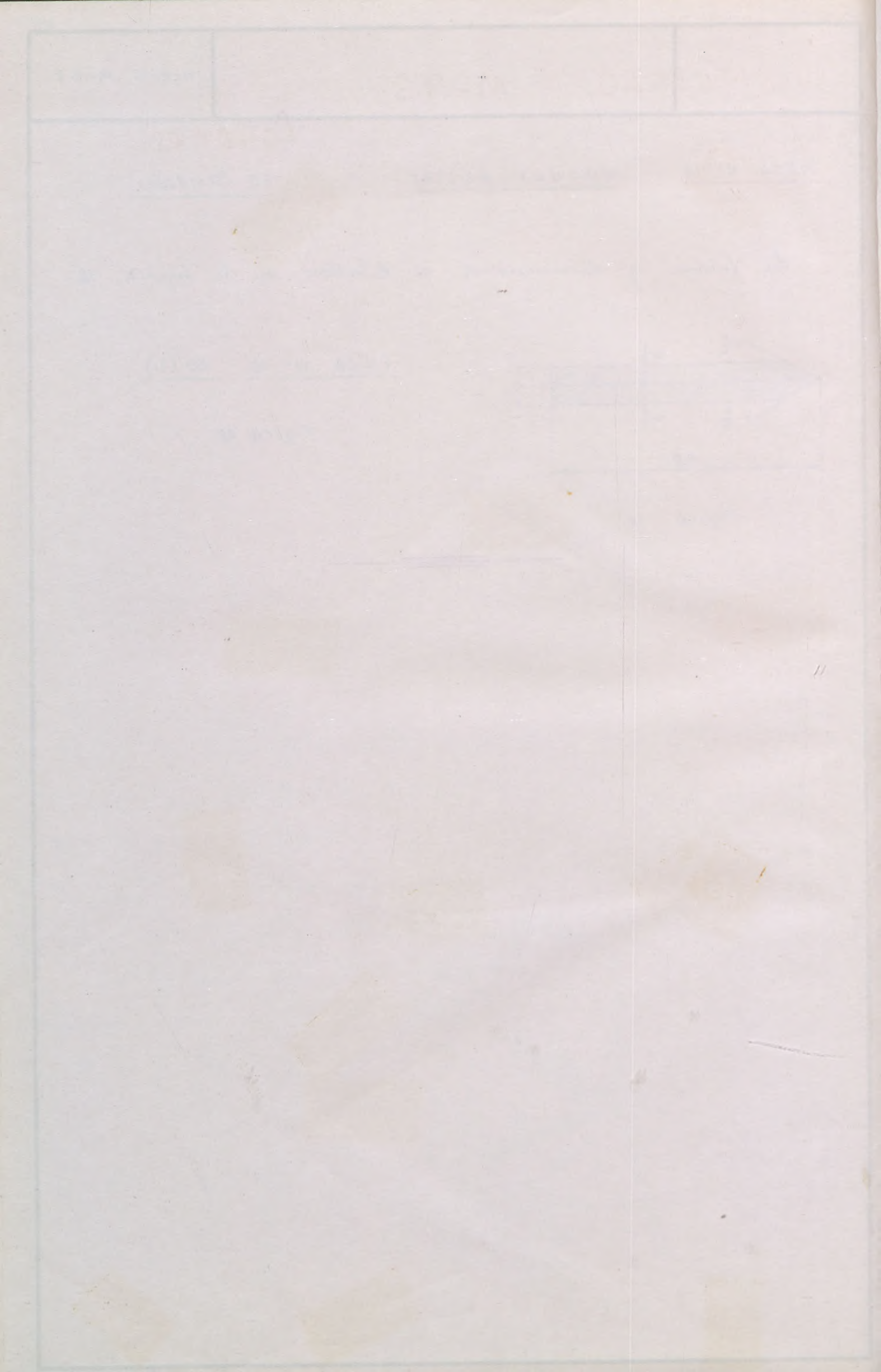


Figura 12

PIEZA Nº 13 60 (u)

Figura 12



MODELO M-9.3

Patrones

20 (u)

20 (u)

12 (u)

colorchecker CLASSIC

calibrite

mm